Esercizio 2

Studiare l'andamento della funzione algebrica razionale:

$$y = \frac{2}{x^2 - 9}$$

Svolgimento

Passo 1. Il Campo di esistenza.
Deve essere:

$$x^2 - 9 \neq 0$$

Risolviamo l'equazione:

$$x^2 - 9 = 0$$

$$x_{1-2} = \pm 3$$

$$x_1 = 3 \qquad x_2 = -3$$

$$C.E. = \{x \epsilon R : x \neq -3 \, , x \neq 3\}$$

Passo 2. Il segno.
Poniamo:

$$y = \frac{2}{x^2 - 9} \geq 0$$

Si trova:

$$x^2 - 9 \geq 0 \qquad \rightarrow \qquad x < -3, \quad x > 3$$

La funzione data è positiva per:

$$x < -3, \quad x > 3$$

Passo 3. L'intersezione con gli assi.
Asse x:
Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} y = \dfrac{2}{x^2 - 9} \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{x^2 - 9} = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Il sistema non ha soluzioni: la funzione non interseca l'asse delle ascisse.

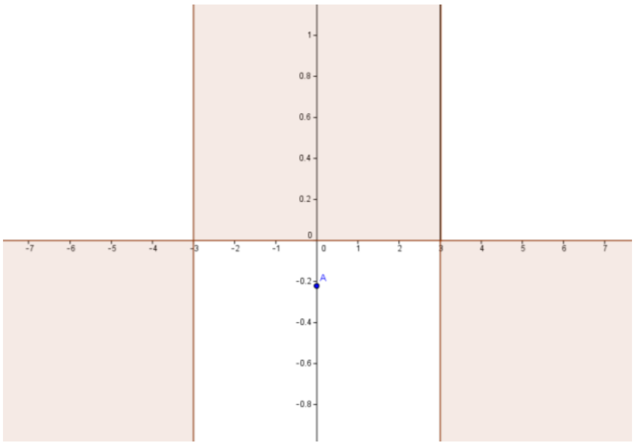
Asse y:
Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} y = \dfrac{2}{x^2 - 9} \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{2}{9} \\ x = 0 \end{cases}$$

La funzione interseca l’asse delle ordinate nel punto:

$$A = \left(0, -\frac{2}{9}\right)$$

Possiamo cominciare a riportare i punti di intersezione ed il segno sul sistema di assi cartesiani.



Passo 4. Gli asintoti: i limiti.
Asintoti orizzontali:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x^2-9} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x^2-9} = 0$$

L’asse delle ascisse è asintoto orizzontale.

Asintoti verticali:

$$\lim_{x\to-3^-} \frac{2}{x^2-9} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-3^+} \frac{2}{x^2-9} = -\infty$$

La retta x=-3 è asintoto verticale.

$$\lim_{x\to3^-} \frac{2}{x^2-9} = -\infty$$

$$\lim_{x\to3^+} \frac{2}{x^2-9} = +\infty$$

La retta x=3 è asintoto verticale.

Asintoti obliqui:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x(x^2-9)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x^3-9x} = 0$$

Non esiste l’asintoto obliquo.

Passo 5. Intersezione con gli asintoti.

La funzione non interseca l’asintoto orizzontale (asse delle ascisse) come già verificato al punto 3.

Passo 6. Crescenza e decrescenza: la derivata prima.

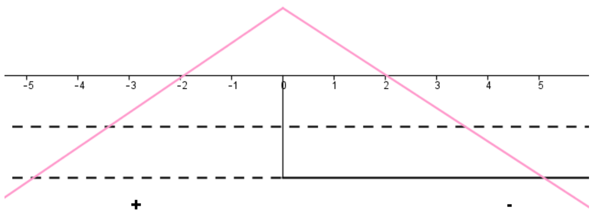
$$f'(x) = \frac{-2(2x)}{(x^2-9)^2} = \frac{-4x}{(x^2-9)^2}$$

Il segno della derivata prima:

$$\frac{-4x}{(x^2-9)^2} > 0$$

Il denominatore è elevato al quadrato e, quindi, è sempre positivo.
Il numeratore è composto da due fattori:

- -4 sempre negativo
- x positivo per x>0



La funzione è crescente per x<0 e decrescente per x>0.

$$f(0) = -\frac{2}{9}$$

Il punto:

$$P = \left(0, -\frac{2}{9}\right)$$

È un massimo relativo.

Passo 7. Concavità e convessità: la derivata seconda.

$$y'' = \frac{-4(x^2-9)^2 - 2(x^2-9)\cdot 2x(-4x)}{(x^2-9)^4} = \frac{(x^2-9)[-4(x^2-9)+16x^2]}{(x^2-9)^4} =$$

$$= \frac{-4x^2+36+16x^2}{(x^2-9)^3} = \frac{12x^2+36}{(x^2-9)^3} = 12\frac{x^2+3}{(x^2-9)^3}$$

Studiamo il segno della derivata seconda:

il numeratore è sempre positivo e non si annulla mai.
Per quanto riguarda il denominatore si trova:

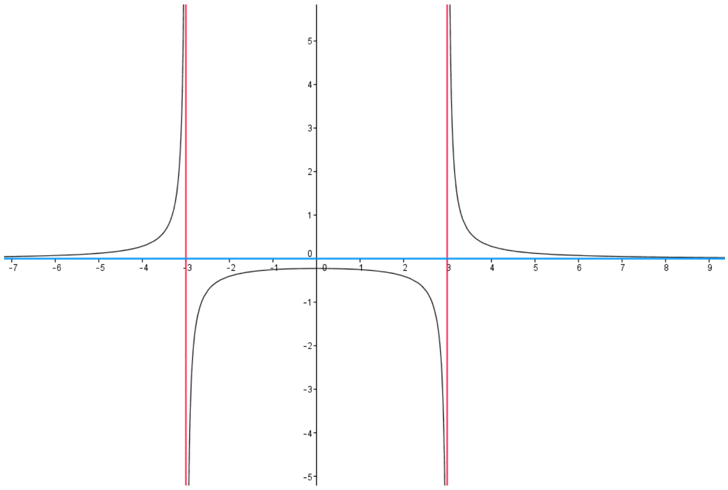
$$(x^2-9)^3 > 0 \quad \rightarrow \quad x^2-9>0 \quad \rightarrow \quad x<-3; x>3$$

Quindi:

- per x<-3 la funzione è convessa;
- per -3<x<3 la funzione è concava;
- per x>3 la funzione è convessa.

La derivata seconda non si annulla mai quindi non sono presenti punti di flesso.

A questo punto possiamo disegnare il grafico.



Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales