**Esercizio 3**

Studiare l'andamento della funzione algebrica razionale:

$$y = \frac{x^2 - 4x + 2}{x^2}$$

**Svolgimento**

Passo 1. Il Campo di esistenza.
Deve essere:

$$x^2 \neq 0$$

$$C.E. = \{x \epsilon R : x \neq 0\}$$

Passo 2. Il segno.
Poniamo:

$$y = \frac{x^2 - 4x + 2}{x^2} \geq 0$$

Il numeratore è sempre positivo. Per trovare il segno del denominatore risolviamo la disequazione:

$$x^2 - 4x + 2 \geq 0$$

$$x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$x_{1-2} = 2 \pm \sqrt{4 - 2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

La funzione data è positiva per:

$$x < 2 - \sqrt{2}, \qquad x > 2 + \sqrt{2}$$

Passo 3. L'intersezione con gli assi.
Asse x:
Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2 - 4x + 2}{x^2} \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4x + 2}{x^2} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 - \sqrt{2} \\ y_1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_2 = 2 - \sqrt{2} \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

La funzione interseca l'asse delle ascisse nei punti:

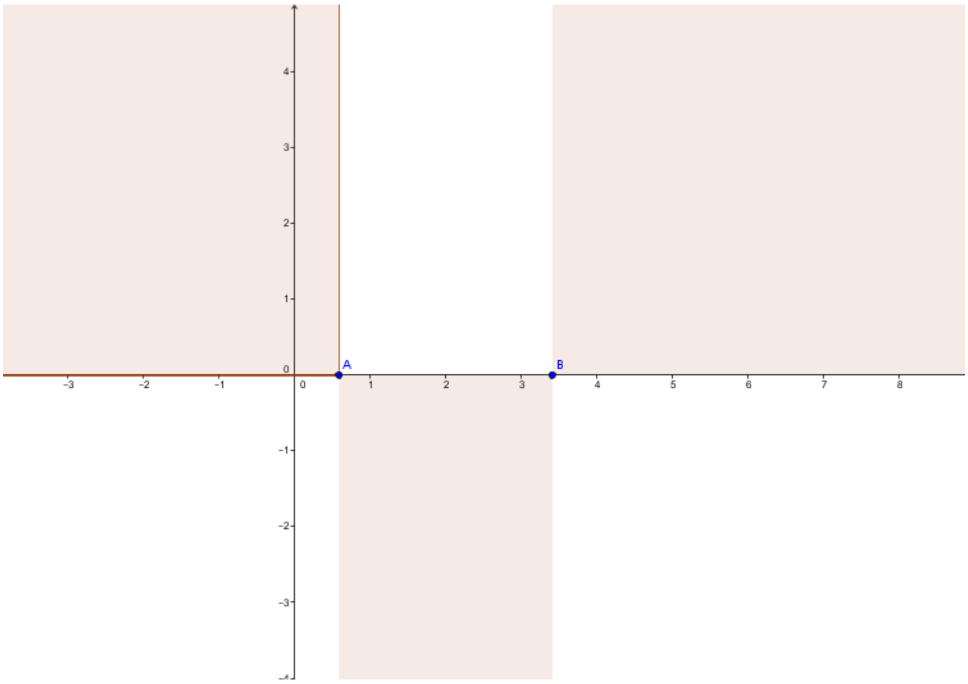
$$A = \left(2 - \sqrt{2}, 0\right) \quad B = \left(2 + \sqrt{2}, 0\right)$$

Asse y:
Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2 - 4x + 2}{x^2} \\ x = 0 \end{cases}$$

Il sistema non ha soluzione. La funzione non interseca l'asse delle ordinate.

Possiamo riportare i punti di intersezione ed il segno sul sistema di assi cartesiani.




Passo 4. Gli asintoti: i limiti.
Asintoti orizzontali:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - 4x + 2}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 4x + 2}{x^2} = 1$$

La retta di equazione y=1 è asintoto orizzontale.

Asintoti verticali:

$$\lim_{x\to0^-} \frac{x^2 - 4x + 2}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{x^2 - 4x + 2}{x^2} = +\infty$$

L'asse delle ordinate è asintoto verticale.

Asintoti obliqui:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-4x+2}{x^3} = 0$$

Non esiste l'asintoto obliquo.

Passo 5. Intersezione con gli asintoti.

Risolviamo Il sistema:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2-4x+2}{x^2} \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2-4x+2}{x^2} = 1 \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2-4x+2-x^2}{x^2} = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x+2 = 0 \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases}$$

La funzione interseca l'asintoto orizzontale nel punto:

$$C = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

Passo 6. Crescenza e decrescenza: la derivata prima.

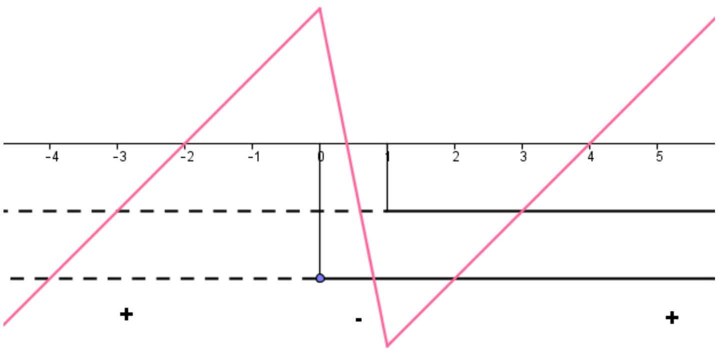
$$f'(x) = \frac{(2x-4)x^2 - 2x(x^2-4x+2)}{x^4} = \frac{2x(x^2-2x-x^2+4x-2)}{x^4} =$$

$$= \frac{4(x-1)}{x^3}$$

Il segno della derivata prima:

$$\frac{4(x-1)}{x^3} > 0$$

Il numeratore è positivo se x>1
Il denominatore è positivo se x>0



La funzione è

- crescente per $x<0$;
- decrescente per $0<x<1$
- crescente per $x>1$

$$f(1) = \frac{1-4+2}{1} = -1$$

Il punto:

$$P = (1, -1)$$

È un minimo assoluto.

<u>Passo 7</u>. Concavità e convessità: la derivata seconda.

$$y'' = \frac{4x^3 - 4 \cdot 3x^2(x-1)}{x^6} = \frac{4x^2(x-3x+3)}{x^6} = \frac{4(3-2x)}{x^4}$$

Studiamo il segno della derivata seconda:

il numeratore è positivo se $x < \frac{3}{2}$.
Il denominatore è sempre positivo.

Quindi:

- per $x < \frac{3}{2}$ la funzione è convessa;
- per $x > \frac{3}{2}$ la funzione è concava.

La derivata seconda si annulla per $x = \frac{3}{2}$.

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\frac{9}{4} - 4\frac{3}{2} + 2}{\frac{9}{4}} = \frac{\frac{9-24+8}{4}}{\frac{9}{4}} = -\frac{7}{4}\frac{4}{9} = -\frac{7}{9}$$

Il punto:

$$F = \left(\frac{3}{2}, -\frac{7}{9}\right)$$

è un punto di flesso.

<u>Passo 8</u>. Studio del punto di flesso: la derivata terza.

$$y''' = \frac{-8x^4 - 16x^3(3-2x)}{x^8} = \frac{-8x - 48 + 32x}{x^5} = \frac{24x - 48}{x^5} = 24\frac{x-2}{x^5}$$

$$f'''\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{24\frac{3}{2} - 2}{\frac{243}{32}} = \frac{36-2}{\frac{243}{32}} = 34\frac{32}{243} = \frac{1088}{243}$$

La derivata terza è positiva nel punto in cui si annulla la derivata seconda quindi il flesso è ascendente.

Passo 8. La tangente nel punto di flesso.

La retta tangente nel punto di flesso ha equazione:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

Dove:

$$x_0 = \frac{3}{2}$$

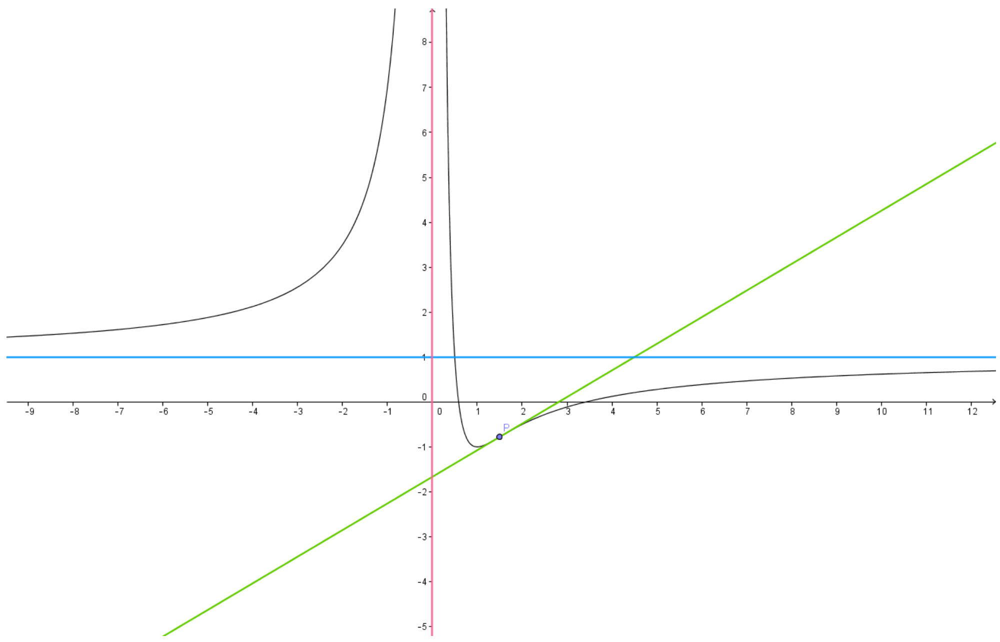
$$f'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{4\left(\frac{3}{2} - 1\right)}{\left(\frac{3}{2}\right)^3} = \frac{4\,\frac{1}{2}}{\frac{27}{8}} = 2\,\frac{8}{27} = \frac{16}{27}$$

Retta tangente nel punto di flesso:

$$y = \frac{16}{27}\left(x - \frac{3}{2}\right) - \frac{7}{9} = \frac{16}{27}x - \frac{8}{9} - \frac{7}{9} = \frac{16}{27}x - \frac{15}{9} = \frac{16}{27}x - \frac{5}{3}$$

$$y = \frac{16}{27}x - \frac{5}{3}$$

A questo punto possiamo disegnare il grafico.



Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales