Esercizio 4

Studiare l'andamento della funzione irrazionale:

$$y = \sqrt{\frac{x^2 - 4x}{1 - x^2}}$$

Svolgimento

Passo 1. Il Campo di esistenza.
Deve essere:

$$1 - x^2 \neq 0 \qquad \rightarrow \qquad x \neq \pm 1$$

e

$$\frac{x^2 - 4x}{1 - x^2} \geq 0$$

Il numeratore è positivo se:

$$x^2 - 4x \geq 0$$

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 4$$

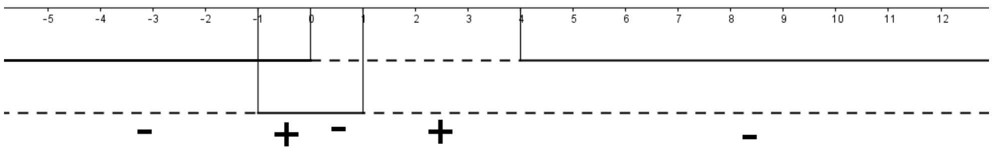
$$x \leq 0 \quad x \geq 4$$

Il denominatore è positivo se:

$$1 - x^2 > 0$$

$$x_{1-2} = \pm 1$$

$$-1 < x < 1$$



$$C.E. = \{x \epsilon R: \; -1 < x \leq 0; \;\; 1 < x \leq 4\}$$

Passo 2. Il segno.
La funzione è sempre positiva.

Passo 3. L'intersezione con gli assi.
Asse x:
Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 4x}{1 - x^2}} \\ \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sqrt{\dfrac{x^2 - 4x}{1 - x^2}} = 0 \\ \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x = 0 \\ \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ \\ y_1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_2 = 4 \\ \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

La funzione interseca l'asse delle ascisse nei punti:

$$A = (0, 0) \quad B = (4, 0)$$

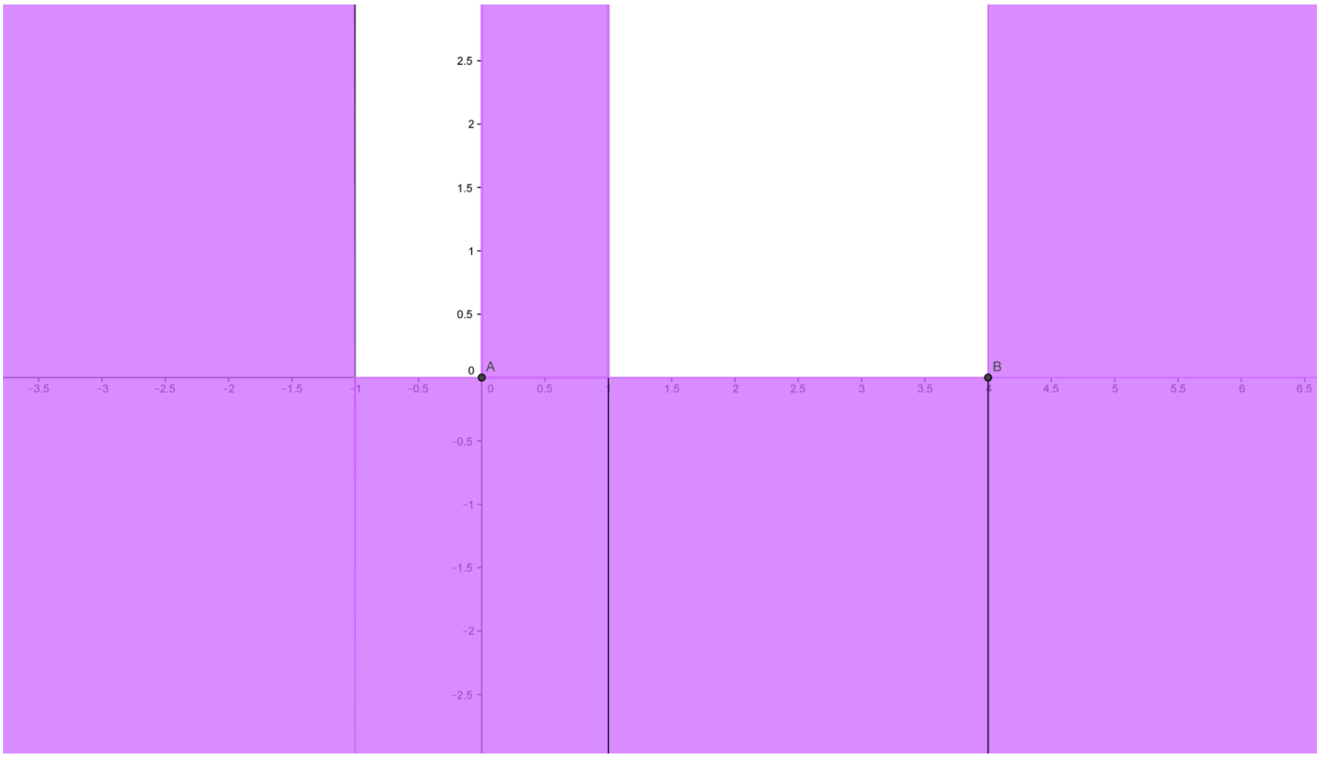
Asse y:
Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 4x}{1 - x^2}} \\ \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \\ y = 0 \end{cases}$$

La funzione interseca l'asse delle ascisse nel punto:

$$A = (0, 0)$$

Possiamo riportare i punti di intersezione ed il segno sul sistema di assi cartesiani.



Passo 4. Gli asintoti: i limiti.
Asintoti orizzontali:

Non esistono asintoti orizzontali.

Asintoti verticali:

$$\lim_{x\to -1^+}\sqrt{\frac{x^2-4x}{1-x^2}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+}\sqrt{\frac{x^2-4x}{1-x^2}}=+\infty$$

Le rette

$$x=-1 \qquad x=1$$

Sono asintoti verticali.
Asintoti obliqui:

Non esistono asintoti obliqui.

<u>Passo 5</u>. Crescenza e decrescenza: la derivata prima.

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2-4x}{1-x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{(2x-4)(1-x^2)+2x(x^2-4x)}{(1-x^2)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x^2}{x^2-4x}}\frac{2x-2x^3-4+4x^2+2x^3-8x^2}{(1-x^2)^2}=\sqrt{\frac{1-x^2}{x^2-4x}}\frac{-4x^2+2x-4}{2(1-x^2)^2}=$$

$$=-\sqrt{\frac{1-x^2}{x^2-4x}}\frac{2x^2+x-2}{(1-x^2)^2}$$

Il segno della derivata prima:

$$\sqrt{\frac{1-x^2}{x^2-4x}}\frac{2x^2+x-2}{(1-x^2)^2}\le 0$$

Il primo fattore è sempre positivo.
Il secondo fattore è positivo se:

$$2x^2+x-2\ge 0$$

$$x_{1-2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot 2\cdot(-2)}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$$

La derivata prima è crescente per:

$$\frac{-1-\sqrt{17}}{4}<x<\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$$

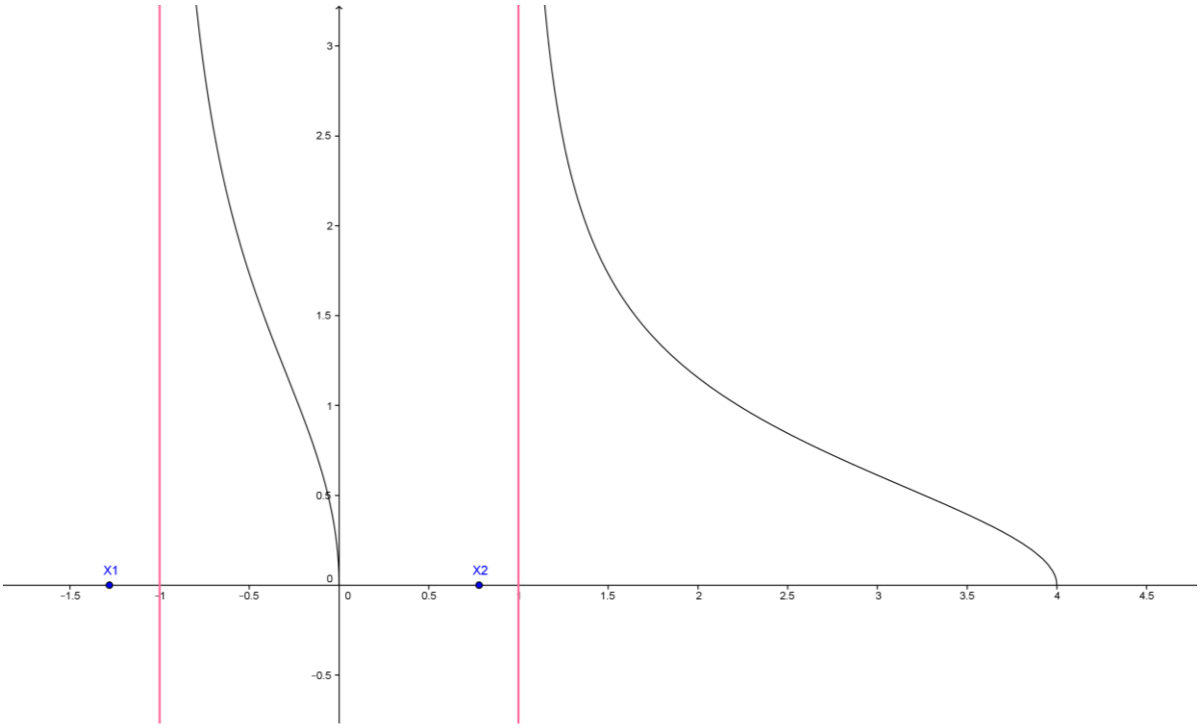
Le due soluzioni non appartengono al dominio della funzione data quindi non ci sono né massimi né minimi. Poiché:

$$\frac{-1-\sqrt{17}}{4}<-1<\frac{-1+\sqrt{17}}{4}<1$$

La funzione è

- crescente per -1<x<0;
- decrescente per 1<x<4

La derivata seconda presenta calcoli molto laboriosi. Disegniamo il grafico.



Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales