Esercizio 5

Studiare l'andamento della funzione algebrica razionale:

$$y = \frac{3}{x^2 + 4}$$

Svolgimento

Passo 1. Il Campo di esistenza.
Deve essere:

$$x^2 + 4 \neq 0$$

$$C.E. = \{x \epsilon R\}$$

Passo 2. Il segno.
Poniamo:

$$y = \frac{3}{x^2 + 4} > 0$$

Il numeratore è sempre positivo. Per trovare il segno del denominatore risolviamo la disequazione:

$$x^2 + 4 \geq 0$$

Il denominatore è sempre positivo e non si annulla mai.
La funzione è sempre positiva.
Notiamo anche che la funzione è pari. Infatti f(x)=f(-x).

Passo 3. L'intersezione con gli assi.
Asse x:
Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} y = \dfrac{3}{x^2 + 4} \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{3}{x^2 + 4} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad mai$$

Non esiste intersezione con l'asse delle ascisse.

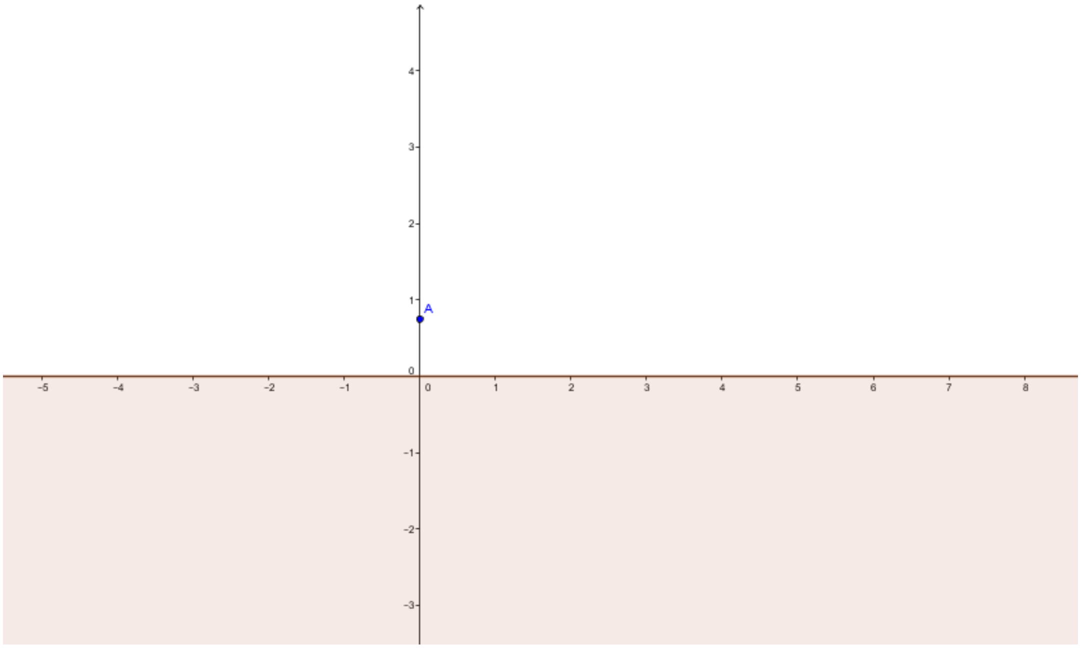
Asse y:
Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} y = \dfrac{3}{x^2 + 4} \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

La funzione interseca l'asse delle ordinate nel punto:

$$A = \left(0, \frac{3}{4}\right)$$

Possiamo riportare i punti di intersezione ed il segno sul sistema di assi cartesiani.



Passo 4. Gli asintoti: i limiti.
Asintoti orizzontali:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x^2+4}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x^2+4}=0$$

La retta di equazione y=0 (asse delle ascisse) è asintoto orizzontale.

Asintoti verticali:

La funzione è definita su tutto R quindi non esistono asintoti verticali
Asintoti obliqui:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x(x^2+4)}=0$$

Non esiste l'asintoto obliquo.

Passo 5. Intersezione con gli asintoti.

Il sistema:

$$\begin{cases} y=\dfrac{3}{x^2+4} \\ y=0 \end{cases}$$

Non ha soluzioni. La funzione non interseca l'asintoto.

Passo 6. Crescenza e decrescenza: la derivata prima.

$$f'(x)=\frac{-6x}{(x^2+4)^2}$$

Il segno della derivata prima:

$$\frac{-6x}{(x^2+4)^2} > 0$$

Il numeratore è positivo se x<0
Il denominatore è sempre positivo.
La derivata prima è positiva se x<0.

La funzione è

- crescente per x<0;
- decrescente per x>0.

Il punto:

$$A = \left(0, \frac{3}{4}\right)$$

È un massimo assoluto.

<u>Passo 7</u>. Concavità e convessità: la derivata seconda.

$$y'' = \frac{-6(x^2+4)^2 + 2(x^2+4)\cdot 2x \cdot 6x}{(x^2+4)^4} = \frac{-6(x^2+4) + 24x^2}{(x^2+4)^3} = \frac{-6x^2 - 24 + 24x^2}{(x^2+4)^3} =$$

$$= \frac{18x^2 - 24}{(x^2+4)^3} = 6\,\frac{3x^2 - 4}{(x^2+4)^3}$$

Studiamo il segno della derivata seconda:

il numeratore è positivo se

$$3x^2 - 4 > 0$$

$$3x^2 - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad x_{1-2} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

La derivata seconda è positiva per

$$x < -\frac{2}{\sqrt{3}} \qquad x > \frac{2}{\sqrt{3}}$$

La funzione è convessa in questo intervallo.
La funzione è concava per:

$$-\frac{2}{\sqrt{3}} < x < \frac{2}{\sqrt{3}}$$

La derivata seconda si annulla per:

$$x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Questi due punti sono flessi.

$$f\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3}{\frac{4}{3}+4} = \frac{9}{16}$$

$$f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\frac{3}{\frac{4}{3}+4}=\frac{9}{16}$$

I punti di flesso sono:

$$B=\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{9}{16}\right)\qquad C=\left(\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{9}{16}\right)$$

<u>Passo 8</u>. Studio del punto di flesso: la derivata terza.

$$y'''=6\frac{6x(x^2+4)^3-3(x^2+4)^2\cdot 2x(3x^2-4)}{(x^2+4)^6}=6\frac{6x(x^2+4)-6x(3x^2-4)}{(x^2+4)^4}=$$

$$=6\frac{6x^3+24x-18x^3+24}{(x^2+4)^4}=6\frac{-12x^3+24x+24}{(x^2+4)^4}=72\frac{-x^3+2x+2}{(x^2+4)^4}$$

Consideriamo il punto di flesso:

$$x=-\frac{2}{\sqrt{3}}$$

E calcoliamo il valore della derivata terza in questo punto:

$$f'''\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=72\frac{\frac{8}{3\sqrt{3}}-2\frac{2}{\sqrt{3}}+2}{\left(\frac{4}{3}+4\right)^4}=72\frac{\frac{8-12+6\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}}{\left(\frac{16}{3}\right)^4}=72\frac{\frac{-4+6\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}}{\frac{65536}{81}}=$$

$$=72\frac{-4\sqrt{3}+18}{9}\frac{81}{65536}=81\frac{-2\sqrt{3}+9}{4096}$$

La derivata terza è positiva nel punto in cui si annulla la derivata seconda quindi il flesso è ascendente.

Consideriamo il punto di flesso:

$$x=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

E calcoliamo il valore della derivata terza in questo punto:

$$f'''\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=72\frac{-\frac{8}{3\sqrt{3}}+2\frac{2}{\sqrt{3}}+2}{\left(\frac{4}{3}+4\right)^4}=72\frac{\frac{-8+12+6\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}}{\left(\frac{16}{3}\right)^4}=72\frac{\frac{4+6\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}}{\frac{65536}{81}}=$$

$$=72\frac{4\sqrt{3}+18}{9}\frac{81}{65536}=81\frac{2\sqrt{3}+9}{4096}$$

La derivata terza è positiva nel punto in cui si annulla la derivata seconda quindi il flesso è ascendente.

<u>Passo 8</u>. La tangente nei punti di flesso.

La retta tangente nel punto di flesso B ha equazione:

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$$

Dove:

$$x_0 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$f'\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-6\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)}{\left[\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + 4\right]^2} = \frac{\frac{12}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{16}{3}\right)^2} = \frac{12}{\sqrt{3}}\frac{9}{256} = \frac{9\sqrt{3}}{64}$$

Retta tangente nel punto di flesso B:

$$y = \frac{9\sqrt{3}}{64}\left(x + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) + \frac{9}{16} = \frac{9\sqrt{3}}{64}x + \frac{9}{32} + \frac{9}{16} = \frac{9\sqrt{3}}{64}x + \frac{27}{32}$$

$$y = \frac{9\sqrt{3}}{64}x + \frac{27}{32}$$

La retta tangente nel punto di flesso C ha equazione:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

Dove:

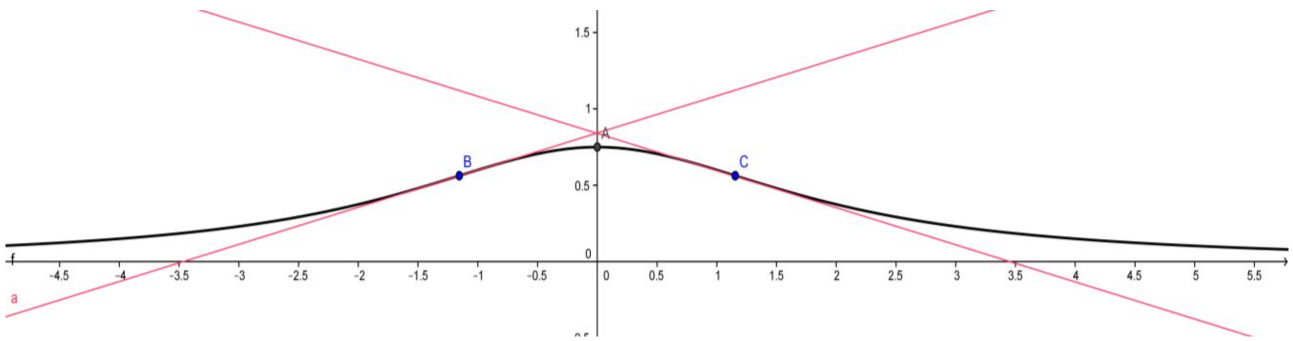
$$x_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$f'\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-6\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)}{\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + 4\right]^2} = \frac{-\frac{12}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{16}{3}\right)^2} = -\frac{12}{\sqrt{3}}\frac{9}{256} = -\frac{9\sqrt{3}}{64}$$

$$y = -\frac{9\sqrt{3}}{64}\left(x - \frac{2}{\sqrt{3}}\right) + \frac{9}{16} = -\frac{9\sqrt{3}}{64}x + \frac{9}{32} + \frac{9}{16} = -\frac{9\sqrt{3}}{64}x + \frac{27}{32}$$

$$y = -\frac{9\sqrt{3}}{64}x + \frac{27}{32}$$

A questo punto possiamo disegnare il grafico.



Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales