Esercizio 6

Studiare l'andamento della funzione:

$$y = \cos x \cdot 3^{-\frac{1}{\cos x}}$$

Svolgimento

<u>Passo 1</u>. Il Campo di esistenza.
Deve essere:

$$\cos x \neq 0$$

$$C.E. = \left\{x \neq k\frac{\pi}{2} \quad con\ k = \pm 1, \pm 2, \dots\right\}$$

<u>Passo 2</u>. La periodicità e il segno.
La funzione proposta ha periodo *2π*. Quindi restringiamo lo studio all'intervallo *[0, 2π]*.
Poniamo:

$$y = \cos x \cdot 3^{-\frac{1}{\cos x}} > 0$$

Il secondo termine è sempre positivo quindi dobbiamo vedere quando:

$$f(x) > 0 \quad \rightarrow \quad \cos x > 0 \quad \rightarrow \quad 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \quad e \quad \frac{3}{2}\pi < x \leq 2\pi$$

Notiamo anche che la funzione è pari. Infatti *f(x)=f(-x)*.

<u>Passo 3</u>. L'intersezione con gli assi.
Asse x:
Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} y = \cos x \cdot 3^{-\frac{1}{\cos x}} \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \quad \begin{cases} \cos x \cdot 3^{-\frac{1}{\cos x}} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad mai$$

Infatti $\cos x = 0 \ \ se \ \ x = k\frac{\pi}{2}$ ma per questi valori la funzione non è definita.

Asse y:
Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} y = \cos x \cdot 3^{-\frac{1}{\cos x}} \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = \cos 0 \cdot 3^{-\frac{1}{\cos 0}} = 1 \cdot 3^{-1} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

La funzione interseca l'asse delle ordinate nel punto:

$$A = \left(0, \frac{1}{3}\right)$$

<u>Passo 4</u>. Gli asintoti: i limiti.
Non ci sono asintoti orizzontali perché

$$\lim_{x \to \infty} \cos x \cdot 3^{-\frac{1}{\cos x}}$$

Non esiste.

Asintoti verticali:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \cos x \cdot 3^{-\frac{1}{\cos x}} = 0 \cdot 3^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \cos x \cdot 3^{-\frac{1}{\cos x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{3^{-\frac{1}{\cos x}}}{\frac{1}{\cos x}} =$$

È una forma indeterminata $\frac{+\infty}{-\infty}$ applico la regola di De l'Hopital.

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{3^{-\frac{1}{\cos x}} \cdot \ln 3 \left(-\frac{sinx}{cos^2x}\right)}{\frac{sinx}{cos^2x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \left(-3^{-\frac{1}{\cos x}} \cdot \ln 3\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi^-} \cos x \cdot 3^{-\frac{1}{\cos x}} = \lim_{x\to\frac{3}{2}\pi^-} \frac{3^{-\frac{1}{\cos x}}}{\frac{1}{\cos x}} =$$

È una forma indeterminata $\frac{+\infty}{-\infty}$ applico la regola di De l'Hopital.

$$= \lim_{x\to\frac{3}{2}\pi^-} \frac{3^{-\frac{1}{\cos x}} \cdot \ln 3 \left(-\frac{sinx}{cos^2x}\right)}{\frac{sinx}{cos^2x}} = \lim_{x\to\frac{3}{2}\pi^-} \left(-3^{-\frac{1}{\cos x}} \cdot \ln 3\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi^+} \cos x \cdot 3^{-\frac{1}{\cos x}} = 0 \cdot 3^{-\infty} = 0$$

<u>Passo 5</u>. Crescenza e decrescenza: la derivata prima.

$$f'(x) = -\sin x \cdot 3^{-\frac{1}{\cos x}} + \cos x \cdot 3^{-\frac{1}{\cos x}} \cdot \ln 3 \left(-\frac{sinx}{cos^2x}\right) =$$

$$= -\sin x \cdot 3^{-\frac{1}{\cos x}} - tgx \cdot 3^{-\frac{1}{\cos x}} \cdot \ln 3 =$$

Moltiplico e divido il primo termine per $\cos x$:

$$= -\frac{\sin x}{\cos x} \cos x \cdot 3^{-\frac{1}{\cos x}} - tgx \cdot 3^{-\frac{1}{\cos x}} \cdot \ln 3 =$$

$$= -tgx \cdot \cos x \cdot 3^{-\frac{1}{\cos x}} - tgx \cdot 3^{-\frac{1}{\cos x}} \cdot \ln 3 =$$

Raccolgo i fattori comuni:

$$= -tgx \cdot 3^{-\frac{1}{\cos x}} (\cos x + \ln 3)$$

Studiamo il segno:

$$-tgx > 0 \to tgx < 0 \;\; per \;\; \frac{\pi}{2} < x < \pi \;\; e \;\; per \;\; \frac{3}{2}\pi < x < 2\pi \;\; tgx = 0 \, per \; x = 0 \; e \; x = \pi$$

Il secondo fattore è sempre positivo. Per quanto riguarda il terzo fattore:

$$\cos x + \ln 3 > 0 \qquad \cos x > -\ln 3 = -1{,}09 \quad sempre$$

Si conclude che il segno della derivata prima dipende solo dal primo termine quindi la funzione data sarà:

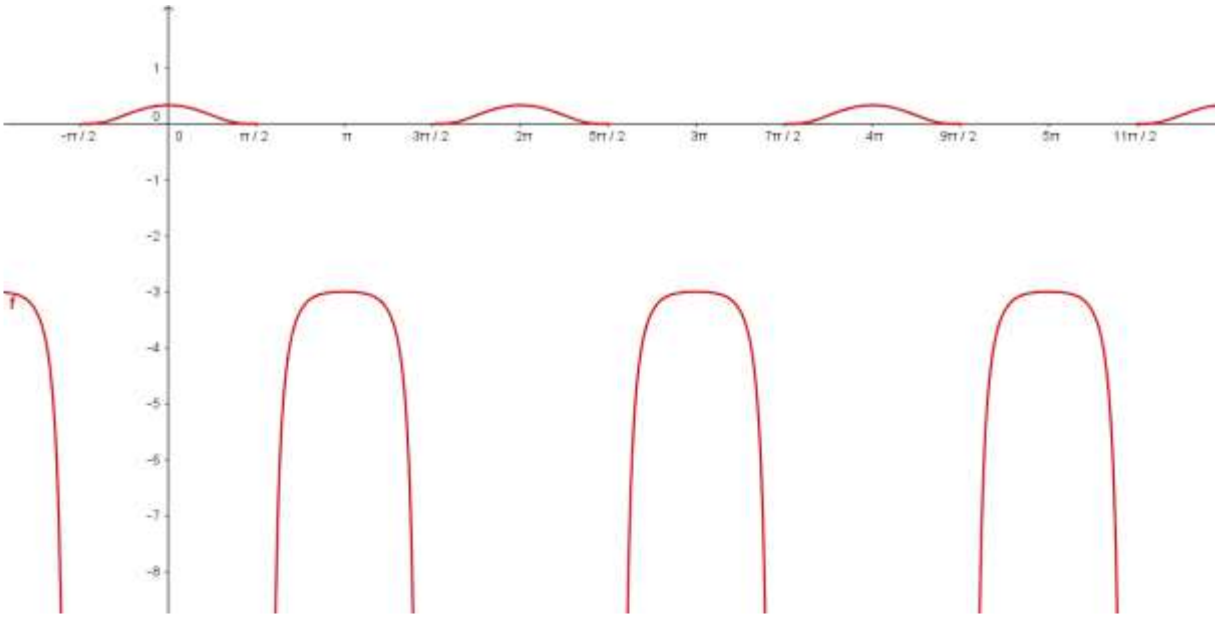
$$crescente\ per\ \frac{\pi}{2} < x < \pi \quad e\ \ per\ \ \frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$$

I punti 0 π e sono massimi.

$$f(0) = f(2\pi) = \frac{1}{3}$$

$$f(\pi) = \cos\pi \cdot 3^{-\frac{1}{\cos\pi}} = -1 \cdot 3 = -3$$

A questo punto possiamo disegnare il grafico.



Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales