**Esercizio 7**

Studiare l'andamento della funzione:

$$f(x) = xe^{\frac{1}{|2x|-1}}$$

**Svolgimento**

Passo 1. Il Campo di esistenza.
Deve essere:

$$|2x| - 1 \neq 0$$

$$|2x| - 1 = 2x - 1 \quad se\ x > 0$$

$$|2x| - 1 = -2x - 1 \quad se\ x < 0$$

$$C.E. = \left\{x \neq \pm\frac{1}{2}\right\}$$

Passo 2. Il segno.

Il secondo fattore è sempre positivo quindi dobbiamo vedere quando:

$$f(x) > 0 \quad \rightarrow \quad x > 0$$

Notiamo anche che la funzione è dispari. Infatti:

$$f(-x) = -xe^{\frac{1}{|2x|-1}} = -f(x)$$

Passo 3. L'intersezione con gli assi.
Asse x:
Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} y = xe^{\frac{1}{|2x|-1}} \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \quad \begin{cases} xe^{\frac{1}{|2x|-1}} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Asse y:
Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} y = xe^{\frac{1}{|2x|-1}} \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Passo 4. Gli asintoti: i limiti.
Non ci sono asintoti orizzontali perché

$$\lim_{x\to-\infty} xe^{\frac{1}{|2x|-1}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{\frac{1}{|2x|-1}} = +\infty$$

Asintoti verticali:

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}^-} xe^{\frac{1}{|2x|-1}} = -\frac{1}{2} \cdot e^{+\infty} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}^+} xe^{\frac{1}{|2x|-1}} = -\frac{1}{2} \cdot e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} xe^{\frac{1}{|2x|-1}} = \frac{1}{2} \cdot e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} xe^{\frac{1}{|2x|-1}} = \frac{1}{2} \cdot e^{+\infty} = +\infty$$

<u>Passo 5</u>. Crescenza e decrescenza: la derivata prima. Per chiarezza studiamo separatamente i due intervalli.
Per *x<0*:

$$f'(x) = e^{\frac{1}{-2x-1}} + x\frac{2}{(-2x-1)^2}e^{\frac{1}{-2x-1}} = e^{\frac{1}{-2x-1}}\frac{4x^2+4x+1+2x}{(2x+1)^2} =$$

$$= e^{\frac{1}{-2x-1}}\frac{4x^2+6x+1}{(2x+1)^2}$$

Il segno dipende dal trinomio al numeratore dato che tutti gli altri fattori sono sempre positivi:

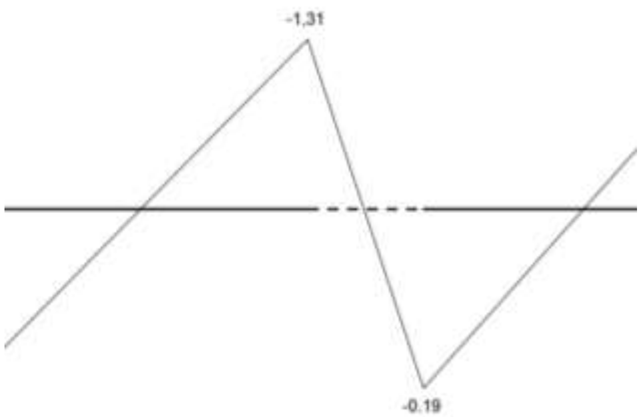
$$f'(x) > 0 \quad \rightarrow \quad 4x^2+6x+1 > 0$$

$$4x^2+6x+1 = 0 \quad \rightarrow \quad x_{1-2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{4}$$

$$x_1 = \frac{-3+\sqrt{5}}{4} \cong -0.19 \qquad x_2 = \frac{-3-\sqrt{5}}{4} \cong -1.31$$

Dato che il coefficiente di $x^2$ è positivo la derivata prima è positiva (funzione crescente) se:

$$x < \frac{-3-\sqrt{5}}{4} \quad e \quad x > \frac{-3+\sqrt{5}}{4}$$



Dal grafico si vede che il punto $x=\frac{-3-\sqrt{5}}{4}$ è un massimo.

$$f\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{4}\right)=-\frac{3+\sqrt{5}}{4}e^{\frac{1}{-2\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{4}\right)-1}}=-\frac{3+\sqrt{5}}{4}e^{\frac{1}{\frac{3+\sqrt{5}}{2}-1}}=-\frac{3+\sqrt{5}}{4}e^{\frac{1}{\frac{3+\sqrt{5}-2}{2}}}=$$

$$=-\frac{3+\sqrt{5}}{4}e^{\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}=-\frac{3+\sqrt{5}}{4}e^{\frac{2}{1+\sqrt{5}}}\cong -2.43$$

Analogamente il punto $x=\frac{-3+\sqrt{5}}{4}$ è un minimo.

$$f\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{4}\right)=\frac{-3+\sqrt{5}}{4}e^{\frac{1}{-2\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{4}\right)-1}}=\frac{-3+\sqrt{5}}{4}e^{\frac{1}{\frac{3-\sqrt{5}}{2}-1}}=\frac{-3+\sqrt{5}}{4}e^{\frac{1}{\frac{3-\sqrt{5}-2}{2}}}=$$

$$=\frac{-3+\sqrt{5}}{4}e^{\frac{1}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}}=\frac{-3+\sqrt{5}}{4}e^{\frac{2}{1-\sqrt{5}}}\cong -3.79\cdot 10^{-2}$$

Per *x>0*:

$$f'(x)=e^{\frac{1}{2x-1}}+x\frac{-2}{(2x-1)^2}e^{\frac{1}{2x-1}}=e^{\frac{1}{2x-1}}\frac{4x^2-4x+1-2x}{(2x-1)^2}=$$

$$=e^{\frac{1}{2x-1}}\frac{4x^2-6x+1}{(2x-1)^2}$$

Il segno dipende dal trinomio al numeratore dato che tutti gli altri fattori sono sempre positivi:

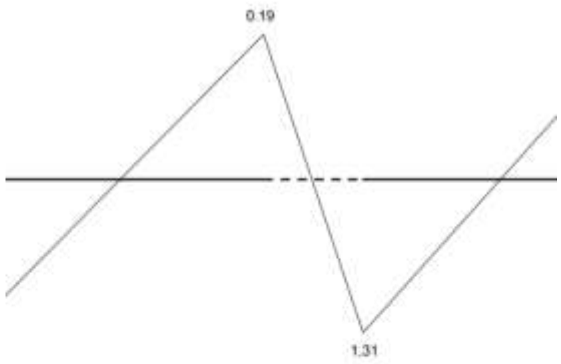
$$f'(x)>0 \quad\rightarrow\quad 4x^2-6x+1>0$$

$$4x^2-6x+1=0 \quad\rightarrow\quad x_{1-2}=\frac{3\pm\sqrt{9-4}}{4}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{4}$$

$$x_1=\frac{3+\sqrt{5}}{4}\cong 1.31 \qquad x_2=\frac{3-\sqrt{5}}{4}\cong 0.19$$

Dato che il coefficiente di $x^2$ è positivo la derivata prima è positiva (funzione crescente) se:

$$x<\frac{3-\sqrt{5}}{4}\quad e \quad x>\frac{3+\sqrt{5}}{4}$$



Dal grafico si vede che il punto $x=\frac{3-\sqrt{5}}{4}$ è un massimo.

$$f\left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right)=\frac{3-\sqrt{5}}{4}e^{\frac{1}{2\frac{3-\sqrt{5}}{4}-1}}=\frac{3-\sqrt{5}}{4}e^{\frac{1}{\frac{3-\sqrt{5}}{2}-1}}=\frac{3-\sqrt{5}}{4}e^{\frac{1}{\frac{3-\sqrt{5}-2}{2}}}=$$

$$=\frac{3-\sqrt{5}}{4}e^{\frac{1}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}}=\frac{3-\sqrt{5}}{4}e^{\frac{2}{1-\sqrt{5}}}\cong 3.79\cdot 10^{-2}$$

Analogamente il punto $x=\frac{3+\sqrt{5}}{4}$ è un minimo.

$$f\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4}\right)=\frac{3+\sqrt{5}}{4}e^{\frac{1}{2\frac{3+\sqrt{5}}{4}-1}}=\frac{3+\sqrt{5}}{4}e^{\frac{1}{\frac{3+\sqrt{5}}{2}-1}}=\frac{3+\sqrt{5}}{4}e^{\frac{1}{\frac{3+\sqrt{5}-2}{2}}}=$$

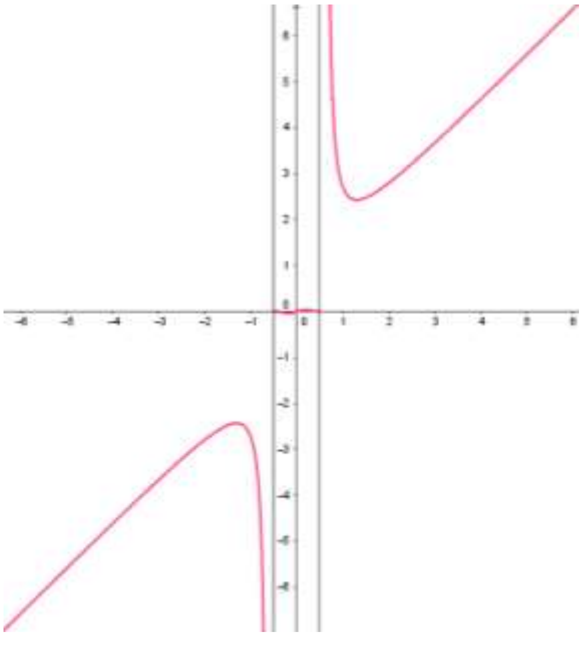
$$=\frac{3+\sqrt{5}}{4}e^{\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}=\frac{3+\sqrt{5}}{4}e^{\frac{2}{1+\sqrt{5}}}\cong 2.43$$

I valori trovati evidenziano che la funzione data ha simmetria dispari come osservato precedentemente. Avremmo potuto risparmiarceli e disegnare subito il grafico ma ho preferito svolgerli per verifica.
In conclusione la funzione data presenta due massimi relativi e due minimi relativi:

$$Massimi:\ \left(-\frac{3+\sqrt{5}}{4},-\frac{3+\sqrt{5}}{4}e^{\frac{2}{1+\sqrt{5}}}\right);\quad \left(\frac{3-\sqrt{5}}{4},\frac{3-\sqrt{5}}{4}e^{\frac{2}{1-\sqrt{5}}}\right)$$

$$Minimi:\ \left(\frac{-3+\sqrt{5}}{4},\frac{-3+\sqrt{5}}{4}e^{\frac{2}{1-\sqrt{5}}}\right);\quad \left(\frac{3+\sqrt{5}}{4},\frac{3+\sqrt{5}}{4}e^{\frac{2}{1+\sqrt{5}}}\right)$$

Grafico:



Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales