Esercizio 11

Un servizio di vigilanza dispone di 10 uomini e 5 donne. Il responsabile dei turni prende a caso 5 persone per il turno della notte. Se il numero di donne assegnato al turno notturno rappresenta la variabile casuale discreta X, trova la funzione di ripartizione F(X).
Qual è la probabilità di assegnare tutte e 5 le donne al turno notturno?

Svolgimento:

Dobbiamo trovare la distribuzione di probabilità della variabile casuale X.
Intanto contiamo gli elementi dell'insieme Ω: sono tutte le sequenze di 5 elementi non ordinati (il testo non specifica a quali servizi verranno assegnate le persone).
Si trova:

$$elementi\ di\ \Omega = \binom{15}{5} = \frac{15!}{10!\,5!} = 3003$$

Adesso troviamo le probabilità.

$$p(X=0) = \frac{numero\ sequenze\ di\ soli\ uomini}{numero\ totale\ sequenze} = \frac{\binom{10}{5}}{3003} = \frac{\frac{10!}{5!\,5!}}{3003} = 8.4 \cdot 10^{-2}$$

$$p(X=1) = \frac{numero\ sequenze\ con\ 1\ donna}{numero\ totale\ sequenze} = \frac{\binom{10}{4}\binom{5}{1}}{3003} = \frac{\frac{10!}{6!\,4!}\frac{5!}{4!\,1!}}{3003} = 0.35$$

$$p(X=2) = \frac{numero\ sequenze\ con\ 2\ donne}{numero\ totale\ sequenze} = \frac{\binom{10}{3}\binom{5}{2}}{3003} = \frac{\frac{10!}{7!\,3!}\frac{5!}{3!\,2!}}{3003} = 0.40$$

$$p(X=3) = \frac{numero\ sequenze\ con\ 3\ donne}{numero\ totale\ sequenze} = \frac{\binom{10}{2}\binom{5}{3}}{3003} = \frac{\frac{10!}{8!\,2!}\frac{5!}{2!\,3!}}{3003} = 0.14$$

$$p(X=4) = \frac{numero\ sequenze\ con\ 4\ donne}{numero\ totale\ sequenze} = \frac{\binom{10}{1}\binom{5}{4}}{3003} = \frac{\frac{10!}{9!\,1!}\frac{5!}{1!\,4!}}{3003} = 0.02$$

$$p(X=5) = \frac{numero\ sequenze\ di\ sole\ donne}{numero\ totale\ sequenze} = \frac{\binom{5}{5}}{3003} = \frac{\frac{5!}{5!\,0!}}{3003} = 3.3 \cdot 10^{-4}$$

Scriviamo la funzione di ripartizione:

$$F(X) = \begin{cases} 8.3 \cdot 10^{-2} & se\ X < 1 \\ 0.434 & se\ 1 \le X < 2 \\ 0.834 & se\ 2 \le X < 3 \\ 0.974 & se\ 3 \le X < 4 \\ 0.994 & se\ 4 \le X < 5 \\ 1 & se\ X > 5 \end{cases}$$

La probabilità di assegnare tutte le donne al turno notturno è $3.3 \cdot 10^{-4}$

Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales