Esercizio 1

Di una variabile casuale binomiale si conoscono il numero di prove effettuate n=10 e la varianza VAR(X)=0,9.
Calcolare p(2<X<6) e la distribuzione di probabilità.

La varianza di una variabile binomiale è data da:

$$VAR(X) = np(1-p)$$

Dove n è il numero di prove effettuate e p è la probabilità di ottenere un successo. Si ricava:

$$VAR(X) = np - np^2 \quad \rightarrow \quad np^2 - np + VAR(X) = 0$$

Sostituiamo i valori numerici e troviamo la probabilità p:

$$10p^2 - 10p + 0.9 = 0$$

$$p_{1-2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-9}}{10} = \frac{5 \pm \sqrt{16}}{10} = \frac{5 \pm 4}{10}$$

Si hanno due valori, entrambi accettabili:

$$p_1 = 0.9 \qquad p_2 = 0.1$$

Dobbiamo studiare i due casi.

Caso 1:

$$p(Successo) = 0.9 \quad p(Insuccesso) = 0.1$$

Ricordando che la distribuzione di probabilità di una variabile binomiale è data da:

$$p(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Si trova:

$$p(X=0) = \binom{10}{0} p^0 (1-p)^{10} = \frac{10!}{0!\,10!}(1-p)^{10} = 10^{-10}$$

$$p(X=1) = \binom{10}{1} p^1 (1-p)^9 = \frac{10!}{1!\,9!} p(1-p)^9 = 9 \cdot 10^{-9}$$

$$p(X=2) = \binom{10}{2} p^2 (1-p)^8 = \frac{10!}{2!\,8!} p^2 (1-p)^8 = 3.6 \cdot 10^{-7}$$

$$p(X=3) = \binom{10}{3} p^3 (1-p)^7 = \frac{10!}{3!\,7!} p^3 (1-p)^7 = 8.7 \cdot 10^{-6}$$

$$p(X=4) = \binom{10}{4} p^4 (1-p)^6 = \frac{10!}{4!\,6!} p^4 (1-p)^6 = 1.4 \cdot 10^{-4}$$

$$p(X=5) = \binom{10}{5} p^5 (1-p)^5 = \frac{10!}{5!\,5!} p^5 (1-p)^5 = 1.5 \cdot 10^{-3}$$

$$p(X=6) = \binom{10}{6} p^6 (1-p)^4 = \frac{10!}{6!\,4!} p^6 (1-p)^4 = 1.1 \cdot 10^{-2}$$

$$p(X=7)=\binom{10}{7}p^7(1-p)^3=\frac{10!}{7!\,3!}p^7(1-p)^3=5.7\cdot 10^{-2}$$

$$p(X=8)=\binom{10}{8}p^8(1-p)^2=\frac{10!}{2!\,8!}p^8(1-p)^2=0.19$$

$$p(X=9)=\binom{10}{9}p^9(1-p)=\frac{10!}{9!\,1!}p^9(1-p)=0.39$$

$$p(X=10)=\binom{10}{10}p^{10}(1-p)^0=\frac{10!}{10!\,0!}p^{10}=0.35$$

La probabilità di ottenere da 2 a 6 successi in 10 prove vale:

$$p(2<X<6)=p(X=3)+p(X=4)+p(X=5)=1.6\cdot 10^{-3}$$

Caso 2:

$$p(Successo)=0.1 \qquad p(Insuccesso)=0.9$$

Si trova:

$$p(X=0)=\binom{10}{0}p^0(1-p)^{10}=\frac{10!}{0!\,10!}(1-p)^{10}=0.35$$

$$p(X=1)=\binom{10}{1}p^1(1-p)^9=\frac{10!}{1!\,9!}p(1-p)^9=0.39$$

$$p(X=2)=\binom{10}{2}p^2(1-p)^8=\frac{10!}{2!\,8!}p^2(1-p)^8=0.19$$

$$p(X=3)=\binom{10}{3}p^3(1-p)^7=\frac{10!}{3!\,7!}p^3(1-p)^7=5.7\cdot 10^{-2}$$

$$p(X=4)=\binom{10}{4}p^4(1-p)^6=\frac{10!}{4!\,6!}p^4(1-p)^6=1.1\cdot 10^{-2}$$

$$p(X=5)=\binom{10}{5}p^5(1-p)^5=\frac{10!}{5!\,5!}p^5(1-p)^5=1.5\cdot 10^{-3}$$

$$p(X=6)=\binom{10}{6}p^6(1-p)^4=\frac{10!}{6!\,4!}p^6(1-p)^4=1.4\cdot 10^{-4}$$

$$p(X=7)=\binom{10}{7}p^7(1-p)^3=\frac{10!}{7!\,3!}p^7(1-p)^3=8.7\cdot 10^{-6}$$

$$p(X=8)=\binom{10}{8}p^8(1-p)^2=\frac{10!}{2!\,8!}p^8(1-p)^2=3.6\cdot 10^{-7}$$

$$p(X=9)=\binom{10}{9}p^9(1-p)=\frac{10!}{9!\,1!}p^9(1-p)=9\cdot 10^{-9}$$

$$p(X=10)=\binom{10}{10}p^{10}(1-p)^0=\frac{10!}{10!\,0!}p^9=10^{-10}$$

La probabilità di ottenere da 2 a 6 successi in 10 prove vale:

$$p(2 < X < 6) = p(X = 3) + p(X = 4) + p(X = 5) = 6.9 \cdot 10^{-2}$$

Matilde Consales