Esercizio 6

Ad uno studente è assegnato un test di 10 domande. Per superare la prova deve rispondere correttamente ad almeno 6 domande.
Quante sono le alternative possibili per superare il test?
Se la probabilità di rispondere correttamente ad ogni domanda è 0,7 qual è la probabilità di aver risposto correttamente alle prime 6 domande?
Cambia la probabilità se si risponde correttamente alla 1^, 2^, 4^, 5^, 6^ e 10^?

Svolgimento:

Indicando con X la variabile aleatoria possiamo scrivere:

$$X = \begin{cases} 1\ (risposta\ corretta)\ p(X=1) = 0.7 \\ 0\ (risposta\ errata) \quad p(X=0) = 0.3 \end{cases}$$

Vediamo quante sono le alternative possibili per superare il test. Dobbiamo contare le sequenze di 10 elementi contenenti 6 risposte corrette, quelle contenenti 7 risposte corrette, ecc.

Cominciamo. Quante sono le sequenze di 10 elementi contenenti 6 risposte corrette? Tante quanti sono i modi di scegliere 6 posizioni su 10[1]. Ma allora:

$$test\ con\ 6\ risposte\ corrette = \binom{10}{6} = \frac{10!}{6!\,4!} = 210$$

$$test\ con\ 7\ risposte\ corrette = \binom{10}{7} = \frac{10!}{7!\,3!} = 120$$

$$test\ con\ 8\ risposte\ corrette = \binom{10}{8} = \frac{10!}{8!\,2!} = 45$$

$$test\ con\ 9\ risposte\ corrette = \binom{10}{9} = \frac{10!}{9!\,1!} = 10$$

$$test\ con\ 10\ risposte\ corrette = \binom{10}{10} = \frac{10!}{10!\,0!} = 1$$

Le alternative possibili per superare il test sono:

$$numero\ alternative = 210 + 120 + 45 + 10 + 1 = 386$$

Osserviamo che il rispondere correttamente ad una domanda non influenza la risposta ad un'altra domanda quindi gli eventi sono indipendenti. Probabilità di aver risposto correttamente alle prime 6 domande:

$$p(1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0) = p(X=1, X=1, X=1, X=1, X=1, X=1, X=0, X=0, X=0, X=0) =$$

[1] Si può trovare anche in un altro modo: quanti sono gli "anagrammi" della stringa 1111110000? Sono $\frac{10!}{6!4!}$ infatti il carattere 1 è presente volte ed il carattere 0 è presente 4 volte e se si scambiano caratteri uguali si ottiene la stessa stringa.

$$= p(X=1) \cdot p(X=1) \cdot p(X=1) \cdot p(X=1) \cdot p(X=1) \cdot p(X=1) \cdot p(X=0) \cdot p(X=0) \cdot p(X=0) \cdot p(X=0) =$$

$$= 0.7^6 \cdot 0.3^4 = 9.5 \cdot 10^{-4}$$

La probabilità non cambia se si risponde correttamente alla 1^, 2^, 4^, 5^, 6^ e 10^.

Matilde Consales