**Esercizio 9**

Un'urna contenente 1 pallina rossa e 99 verdi, si estraggono, con reinserimento, 500 palline. Determinare:

- il numero medio di palline rosse estratte;
- il valore più probabile di palline rosse estratte;
- la probabilità di ottenere un numero di palline rosse maggiore di 5.

**Svolgimento:**

Per risolvere questo esercizio potremmo usare una variabile aleatoria binomiale. Infatti:

- Ogni estrazione è una prova che può avere due esiti possibili: rossa (successo) o verde (insuccesso);
- La probabilità che si verifichi un successo (pallina rossa) o un insuccesso (pallina verde) è costante;
- I risultati delle prove sono indipendenti. (L'estrazione di una pallina non influenza quella di un'altra pallina perché reinseriamo la pallina estratta).

Indicando con X la variabile aleatoria possiamo scrivere:

$$X = \begin{cases} 1\ (pallina\ rossa)\ p(X=1) = 0.01 \\ 0\ (pallina\ verde) p(X=0) = 0.99 \end{cases}$$

Il numero medio di pallina rosse estratte vale:

$$E(X) = np = 500 \cdot 0.01 = 5$$

Per trovare il valore più probabile di palline osserviamo che il numero delle prove effettuate è maggiore di 100 e la media della variabile binomiale è minore di 10. Possiamo, applicando la legge degli eventi rari, approssimare questa variabile casuale ad una variabile casuale di Poisson con media uguale alla media trovata:

$$\lambda = 5$$

Calcoliamo le probabilità usando l'equazione:

$$p(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}\ e^{-\lambda}$$

| **X** | **p(X)** |
|---|---|
| 0 | $6.73 \cdot 10^{-3}$ |
| 1 | $3.37 \cdot 10^{-2}$ |
| 2 | $8.42 \cdot 10^{-2}$ |
| 3 | 0.140 |
| 4 | 0.175 |
| 5 | 0.175 |
| 6 | 0.146 |
| 7 | 0.104 |

Continuando la probabilità decresce. I valori più probabili di palline rosse estratte sono 4 e 5.

Per determinare la probabilità cercata osserviamo che:

$$p(X > 5) = 1 - p(X \leq 5)$$

$$p(X \leq 5) = p(X=0) + p(X=1) + p(X=2) + p(X=3) + p(X=4) + p(X=5) =$$

$$= \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} + \frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda} + \frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda} + \frac{\lambda^4}{4!}e^{-\lambda} + \frac{\lambda^5}{5!}e^{-\lambda} = 0.61$$

Possiamo scrivere:

$$p(X > 5) = 1 - 0.61 = 0.39$$

Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales