Funzione di ripartizione

Definizione

La funzione di ripartizione o di distribuzione o delle probabilità cumulate si definisce per variabili aleatorie discrete e continue. La usiamo quando vogliamo conoscere la probabilità che la variabile casuale assuma valori minori o uguali a x.

$$F_X(x) = p(X \leq x)$$

Proprietà

1. La funzione di ripartizione assume valori compresi nell'intervallo [0, 1]:

$$0 \leq F_X(x) \leq 1;$$

2. Quando $x \to -\infty$ si trova:

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$$

3. La probabilità che la variabile aleatoria assuma tutti i valori è 1 (normalizzazione):

$$\lim_{x \to +\leftrightarrow \infty} F_X(x) = 1$$

4. La funzione di distribuzione è monotona non decrescente:

$$x_1 < x_2 \to F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$$

5. La funzione di probabilità permette di trovare la probabilità che la variabile casuale X assuma valori compresi in intervalli di tipo (x_1, x_2]:

$$p(x_1 \leq X < x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1) + p(X = x_1) - p(X = x_2)$$

$$p(x_1 < X < x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1) - p(X = x_2)$$

$$p(x_1 \leq X \leq x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1) + p(X = x_1)$$

6. Nel caso di variabile aleatoria discreta la funzione di probabilità è continua a destra:

$$\lim_{x \to x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$$

7. Nel caso di variabile aleatoria discreta la funzione di ripartizione presenta punti di discontinuità di prima specie[1]:

$$\lim_{x \to x_0^-} F_X(x) \neq F_X(x_0)$$

8. Se la variabile aleatoria è continua la funzione di ripartizione è continua e si ha:

$$\lim_{x \to x_0^-} F_X(x) = \lim_{x \to x_0^+} F_X(x) \;\; \to \;\; F_X(x_0^-) - F_X(x_0) = 0$$

[1] La discontinuità di prima specie si presenta quando una funzione fa un "salto" dato da $\lim_{x \to x_0^+} F_X(x) - \lim_{x \to x_0^-} F_X(x) = F_X(x_0) - F_X(x_0^-) = p(X = x_0)$

Esempio

Consideriamo il lancio di un dado non truccato: gli unici risultati possibili sono le facce da 1 a 6, ciascuna con probabilità 1/6. Scriviamo la funzione di ripartizione.

X	p(X)	$F_X(x)$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$
4	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$
5	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$
6	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=1$

Troviamo alcune probabilità:

$$p(X=5)=p(X\leq 5)-p(X<5)=F(5)-F(4)=\frac{5}{6}-\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$$

$$p(1<X\leq 4)=F(4)-F(1)=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

$$p(2\leq X<5)=F(5)-F(2)+p(X=2)-p(X=5)=\frac{5}{6}-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

$$p(3<X<6)=F(6)-F(3)-p(X=6)=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

$$p(2\leq X\leq 4)=F(4)-F(2)+p(4)=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales