Variabili aleatorie

Definizione

Una variabile aleatoria (casuale o stocastica) è una **funzione** X che associa ad ogni elemento ω dello spazio degli eventi (o spazio campionario) Ω un unico numero.

$$X(\omega_i) = x_i$$

I valori assunti da questa funzione sono forniti da un esperimento di cui non siamo in grado di prevedere il risultato con certezza.

Tipi di variabili aleatorie

Una variabile aleatoria è:

- ***discreta*** se può assumere valori in un insieme finito di valori. Generalmente queste variabili sono associate a processi di conteggio. Ad esempio numero di auto in un parcheggio, numero di persone presenti ad una conferenza.
- ***continua*** se può assume tutti i valori compresi in un determinato intervallo. Queste variabili sono associate a processi di misura. Ad esempio l'altezza media degli individui di una popolazione, il fatturato annuale di un'azienda.

Esempi

Esempio 1: Una variabile aleatoria discreta.

Consideriamo il lancio di una moneta.
Lo spazio degli eventi è:

$$\Omega = \{Testa, Croce\}$$

Possiamo associare a questo spazio una variabile aleatoria definita nel seguente modo:

$$X(\{Testa\}) = 0 \quad X(\{Croce\}) = 1$$

Esempio 2: Una variabile aleatoria discreta.

Consideriamo il lancio di due monete.
Lo spazio degli eventi è costituito da coppie (il prodotto cartesiano dello spazio di un lancio singolo per se stesso):

$$\Omega^2 = \Omega x \Omega = \{(T,T); (T,C);\ (C,T);\ (C,C)\}$$

In questo caso possiamo associare a Ω una variabile aleatoria:

$$X(\{(T,T)\}) = 0 \quad X(\{(T,C)\}) = X(\{(C,T)\}) = 1 \quad X(\{(C,C)\}) = 2$$

Esempio 3: Una variabile aleatoria continua.

Consideriamo la misura dell'altezza degli individui di una popolazione.
In questo caso lo spazio Ω contiene un numero infinito di elementi (tutte le possibili altezze in centimetri).
Possiamo associare a Ω una variabile aleatoria che assuma tutti i valori di un intervallo, ad esempio:

$$80 \leq X \leq 190$$

In questo caso X è una variabile aleatoria continua.

Esempio 4: Una variabile aleatoria discreta con spazio Ω continuo.

Consideriamo la temperatura di una stanza.
In questo caso lo spazio Ω contiene un numero infinito di elementi (tutte le possibili temperature della stanza in gradi centigradi).
Possiamo associare a Ω una variabile aleatoria discreta che assuma i seguenti valori:

$$\begin{cases} X = 0 \; se \; T < 15°\text{C} \\ X = 1 \; se \; 15°\text{C} \leq T \leq 20°\text{C} \\ X = 2 \; se \; T > 20°\text{C} \end{cases}$$

In questo caso X è una variabile aleatoria discreta associata ad uno spazio continuo.

Definiamo la probabilità

A questo punto associamo ad ogni valore che la variabile aleatoria assume la probabilità che tale valore possa essere osservato (che si verifichi l'evento associato a tale valore).
La funzione che associa una probabilità ad ogni valore assunto dalla variabile aleatoria viene detta ***distribuzione di probabilità*** o ***legge di probabilità***.

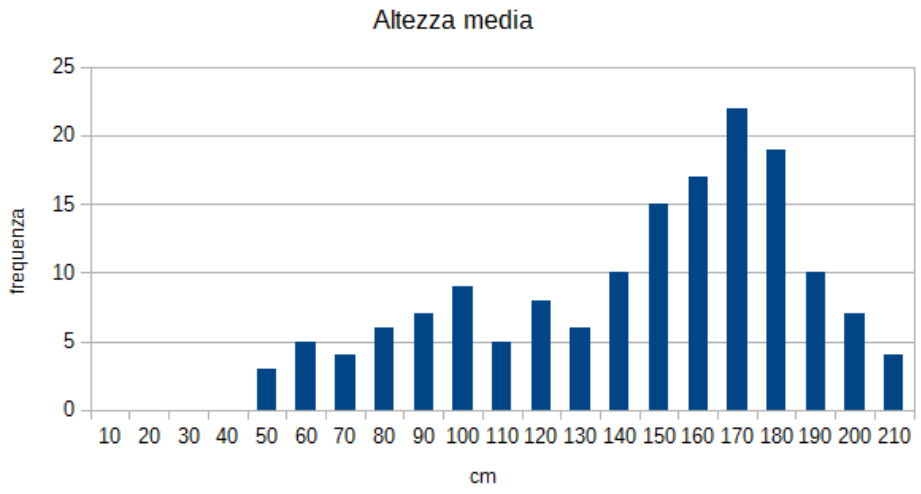
Riprendiamo l'**esempio 1** (quello del lancio della moneta). Supponiamo che la moneta sia truccata e associamo ai valori assunti dalla variabile aleatoria X le probabilità:

$$p(X = 0) = \frac{1}{3} \qquad p(X = 1) = 1 - p(X = 0) = \frac{2}{3}$$

Allo stesso modo, facendo riferimento all'**esempio 2** (lancio di due monete). Supponendo che le monete non siano truccate possiamo definire le probabilità:

$$\begin{cases} p(X = 0) = \frac{1}{4} \\ p(X = 1) = \frac{1}{2} \\ p(X = 2) = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Il caso dell'**esempio 3** è più complicato: ci interessa la probabilità che la variabile aleatoria assuma valori in un determinato intervallo, anche infinitesimo del tipo (x, x+dx].
Costruiamo l'istogramma ponendo in ascissa i valori assunti dalla variabile aleatoria X (suddivisi in intervalli) e in ordinata il numero di osservazioni di tale valore (vedi figura).



In figura abbiamo usato intervalli ΔX=10cm. Per ΔX→0 l'istogramma tende ad una curva f(x) detta ***Funzione densità di probabilità***.
La funzione densità di probabilità è tale che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 = p(-\infty < X < +\infty)$$

Tornando al nostro esempio la probabilità che la variabile aleatoria X assuma tutti i valori compresi tra 80cm e 190cm è data da:

$$p(80 \leq X \leq 190) = \int_{80}^{190} f(x)\,dx$$

Riassumendo

Abbiamo associato ad uno spazio Ω una variabile aleatoria:

- discreta con Ω discreto (esempi 1 e 2);
- continua con Ω continuo (esempio 3);
- discreta con Ω continuo (esempio 4).

Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales