Variabili aleatorie binomiali

Quando si usa

Si usa in caso di esperimento con prove ripetute con le seguenti caratteristiche:

- ad ogni prova si hanno due esiti possibili: successo o insuccesso;
- la probabilità che si verifichi un successo (o un insuccesso) è costante;
- i risultati delle prove sono indipendenti[1].

La variabile aleatoria che descrive ogni singola prova è detta ***binomiale*** o di ***Bernoulli***. Assume solo 2 valori: 1=successo, 0=insuccesso.

$$X = \begin{cases} 1 & P(X=1) = p \\ 0 & P(X=0) = 1-p \end{cases}$$

dove p è la probabilità del successo e $0 \leq p \leq 1$.

Esempio

Ci chiediamo qual è la probabilità di ottenere 2 successi (supponiamo 2 croci) se lanciamo una moneta truccata 5 volte.
In questo esperimento:

- ogni prova (lancio della moneta) ha due esiti possibili: successo (croce) o insuccesso (testa);
- la probabilità che si verifichi un successo o un insuccesso è costante (p=½);
- i risultati delle prove sono indipendenti.

Possiamo usare la variabile aleatoria di Bernoulli.
Definiamo la variabile X_i nel seguente modo:

$$X_i = \begin{cases} 1 & se\ al\ lancio\ i-esimo\ esce\ croce\ \ P(X=1) = p = \frac{1}{3} \\ 0 & se\ al\ lancio\ i-esimo\ esce\ testa\ \ P(X=0) = (1-p) = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Calcoliamo la probabilità di ottenere 2 croci lanciando 5 volte una moneta. Supponiamo di avere la seguente sequenza:

CTTCT

$$p(CTTCT) = p(X=1, X=0, X=0, X=1, X=0) =$$

$$= p(X=1) \cdot p(X=0) \cdot p(X=0) \cdot p(X=1) \cdot p(X=0) =$$

$$= p(1-p)(1-p)p(1-p) = p^2(1-p)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{1}{9}\frac{8}{27} = \frac{8}{243} \sim 0.033$$

Consideriamo adesso un'altra cinquina e troviamo la probabilità.

TCTCT

$$p(TCTCT) = p(X=0, X=1, X=0, X=1, X=0) =$$

[1] Se le prove sono estrazioni di palline da un'urna la pallina va reinserita.

$$= p(X=0)\cdot p(X=1)\cdot p(X=0)\cdot p(X=1)\cdot p(X=0) =$$

$$= (1-p)p(1-p)p(1-p) = p^2(1-p)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{1}{9}\frac{8}{27} = \frac{8}{243} \sim 0.033$$

tutte le cinquine si verificano con la stessa probabilità. Ma quante sono? Tante quanti sono i modi di scegliere 2 posizioni su 5. Quindi:

$$numero\ cinquine = \binom{5}{2} = \frac{5!}{(5-2)!\,2!} = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10$$

La probabilità di ottenere 2 successi su 5 lanci è data dalla somma delle probabilità con cui si verificano tutte le cinquine. Ma allora:

$$p(2\ croci\ su\ 5\ lanci) = \binom{5}{2} p(cinquina) \sim 10\cdot 0.033 = 0.33$$

In generale la probabilità di ottenere k successi con n prove con la variabile aleatoria di Bernoulli è data da:

$$p(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Abbiamo appena trovato la ***distribuzione di probabilità*** di una variabile aleatoria binomiale o di Bernoulli.
La distribuzione di probabilità associa ad ogni evento la sua probabilità.
Tornando al nostro esempio ci chiediamo da quanti elementi è formato lo spazio Ω?
Da tutte le cinquine contenenti:

- 5 croci;
- 1 testa e 4 croci;
- 2 teste e 3 croci;
- 3 teste e 2 croci;
- 4 teste e 1 croce;
- 5 croci.

Ma quante sono?
Facciamo la somma:

$$numero\ elementi\ di\ \Omega = \binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} =$$

$$= \frac{5!}{5!\,0!} + \frac{5!}{4!\,1!} + \frac{5!}{3!\,2!} + \frac{5!}{2!\,3!} + \frac{5!}{1!\,4!} + \frac{5!}{0!\,5!} = 1+5+10+10+5+1 = 32$$

In generale:

$$numero\ elementi\ di\ \Omega = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

La somma delle probabilità di tutti gli eventi dello spazio Ω è data da:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =$$

Ricordando che la relazione appena scritta rappresenta la potenza ennesima di un binomio:

$$= [p + (1-p)]^n = 1^n = 1$$

La media (o valore atteso)

Troviamo la media ricordando che è data dalla somma del valore assunto dalla variabile per la sua probabilità:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{(n-k)!\,k!} p^k (1-p)^{n-k} =$$

Dato che il primo termine è nullo facciamo partire la sommatoria da 1:

$$= \sum_{k=1}^{n} k \frac{n(n-1)!}{[n-1-(k-1)]!\,k(k-1)!} p^k (1-p)^{n-k} =$$

Semplifichiamo k e raccogliamo np:

$$= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{[n-1-(k-1)]!\,(k-1)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k} =$$

Poniamo t=k-1

$$= np \sum_{t=0}^{n} \frac{n(n-1)!}{[n-1-t]!\,t!} p^t (1-p)^{n-1-t}$$

Ma

$$\sum_{t=0}^{n} \frac{(n-1)!}{[n-1-t]!\,t!} p^t (1-p)^{n-1-t} = 1$$

Perché è la somma delle probabilità di tutti gli eventi dello spazio Ω. Quindi:

$$E(X) = np$$

La varianza

La varianza è data dalla relazione:

$$VAR(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 =$$

Sostituendo i valori già calcolati:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \frac{n!}{(n-k)!\,k!} p^k (1-p)^{n-k} - n^2 p^2 =$$

Sommo e sottraggo k al primo termine:

$$= \sum_{k=0}^{n} (k^2 - k + k) \frac{n!}{(n-k)!\,k!} p^k (1-p)^{n-k} - n^2 p^2 =$$

Raccolgo k:

$$= \sum_{k=0}^{n} [k(k-1) + k] \frac{n!}{(n-k)!\,k!} p^k (1-p)^{n-k} - n^2 p^2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\frac{n!}{(n-k)!\,k!}p^k(1-p)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} k\frac{n!}{(n-k)!\,k!}p^k(1-p)^{n-k} - n^2p^2 =$$

La sommatoria evidenziata è la media quindi posso sostituire ad essa il valore np:

$$= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\frac{n!}{(n-k)!\,k!}p^k(1-p)^{n-k} + np - n^2p^2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\frac{n(n-1)(n-2)!}{[n-2-(k-2)]!\,k(k-1)(k-2)!}p^2p^{k-2}(1-p)^{n-k} + np - n^2p^2 =$$

Semplifico i termini evidenziati e raccolgo n(n-1)p^2 devo porre il valore iniziale della sommatoria k=2 perché il fattoriale non è definito per interi negativi:

$$= n(n-1)p^2\sum_{k=2}^{n}\frac{(n-2)!}{[n-2-(k-2)]!\,(k-2)!}p^{k-2}(1-p)^{n-k} + np - n^2p^2 =$$

Adesso sostituisco t=k-2:

$$= n(n-1)p^2\sum_{t=0}^{n-2}\frac{(n-2)!}{[n-2-t]!\,t!}p^t(1-p)^{n-2-t} + np - n^2p^2$$

Ma

$$\sum_{t=0}^{n-2}\frac{(n-2)!}{[n-2-t]!\,t!}p^t(1-p)^{n-2-t} = 1$$

Perché è la somma delle probabilità di tutti gli eventi dello spazio Ω. Quindi:

$$VAR(X) = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 = np(1-p)$$

Riprendendo l'esempio della moneta la media e la varianza valgono, rispettivamente:

$$E(X) = np = 5\frac{1}{3} = \frac{5}{3} = 1.67$$

$$VAR(X) = np(1-p) = 5\frac{1}{3}\frac{2}{3} = \frac{10}{9} = 1.11$$

Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales