Variabili aleatorie geometriche

Quando si usa

Si usa in caso di esperimento con prove ripetute con le seguenti caratteristiche:

- ad ogni prova si hanno due esiti possibili: successo o insuccesso;
- la probabilità che si verifichi un successo (o un insuccesso) è costante;
- i risultati delle prove sono dipendenti[1];
- la variabile è il numero di prove necessarie per avere il primo successo.

La probabilità di avere un successo al k-esimo tentativo è data da:

$$p(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$$

Esempio

In una produzione di giunti cardanici in una fabbrica il 3% viene scartato perché difettosi. Uno schema di controllo consiste nel prendere pezzi a caso dalla produzione e nel contare quanti ne vengono presi prima di trovarne uno imperfetto.
Rappresentiamo i primi termini 5 di questa distribuzione.

Se indichiamo con k il numero di giunti cardanici che prendiamo fino al primo imperfetto **escluso** possiamo scrivere:

$$p(X = k) = p(1 - p)^{k-1} = 0.03 \cdot (0.97)^{k-1}$$

Nella relazione precedente abbiamo posto:

$$p = 0.03\ probabilità\ pezzo\ difettoso \quad 1 - p = 0.97\ probabilità\ pezzo\ buono$$

Applicando la relazione troviamo:

$$p(X = 1) = p = 0.03$$

$$p(X = 2) = p(1 - p) = 0.03 \cdot 0.97 = 0.0291$$

$$p(X = 3) = p(1 - p)^2 = 0.03 \cdot 0.97^2 = 0.0282$$

$$p(X = 4) = p(1 - p)^3 = 0.03 \cdot 0.97^3 = 0.0274$$

$$p(X = 5) = p(1 - p)^4 = 0.03 \cdot 0.97^4 = 0.0285$$

Il numero di prove potrebbe essere infinito perché potrei anche non ottenere mai il successo.
Lo spazio Ω ha infiniti elementi e le probabilità associate al numero k di prove sono i termini della serie geometrica:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} p(1 - p)^k = p \sum_{k=0}^{+\infty} (1 - p)^k$$

La sommatoria rappresenta la serie geometrica di ragione 1-p. Poiché 1-p<1 per definizione di probabilità, la serie converge. Possiamo scrivere:

$$p \sum_{k=0}^{+\infty} (1 - p)^k = \frac{p}{1 - (1 - p)} = \frac{p}{p} = 1$$

[1] Se le prove sono estrazioni di una pallina da un'urna la pallina non va reinserita.

Ma allora abbiamo la certezza di ottenere un successo se effettuiamo infinite prove.

La media (o valore atteso)

Troviamo la media ricordando che è data dalla somma del valore assunto dalla variabile per la sua probabilità:

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\, p(1-p)^{k-1} = p \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1}$$

Scriviamo i primi termini della serie:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} = 1 + 2(1-p) + 3(1-p)^2 + 4(1-p)^3 + \cdots + k(1-p)^{k-1} + \cdots$$

Adesso consideriamo la serie geometrica di ragione 1-p che converge perché 1-p<1 per definizione di probabilità

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^k = \frac{1}{p}$$

Scriviamo i primi termini della serie:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^k = 1 + (1-p) + (1-p)^2 + (1-p)^3 + \cdots + (1-p)^k + \cdots = \frac{1}{p}$$

Deriviamo membro a membro rispetto a p:

$$-1 - 2(1-p) - 3(1-p)^2 + \cdots - k(1-p)^{k-1} + \cdots = -\frac{1}{p^2}$$

Moltiplicando ambo i membri per -1 si ottiene:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} = \frac{1}{p^2}$$

Ma allora:

$$p \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} = p\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$$

Quindi la media vale:

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

La varianza

La varianza è data dalla realzione:

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Sostituendo i valori:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 p(1-p)^{k-1} - \frac{1}{p^2} \qquad (1)$$

Consideriamo la serie:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 p(1-p)^{k-1} = p \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 (1-p)^{k-1}$$

E calcoliamo la somma. Partiamo dalla serie di cui conosciamo la somma:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} = \frac{1}{p^2}$$

Da cui si ricava:

$$\frac{1}{1-p} \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k} = \frac{1}{p^2}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k} = \frac{1-p}{p^2}$$

Deriviamo ambo i membri:

$$-\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 (1-p)^{k-1} = \frac{-p^2 - 2p(1-p)}{p^4}$$

$$-\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 (1-p)^{k-1} = \frac{-p - 2(1-p)}{p^3}$$

$$-\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 (1-p)^{k-1} = \frac{-p - 2 + 2p}{p^3}$$

$$-\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 (1-p)^{k-1} = \frac{p-2}{p^3}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 (1-p)^{k-1} = \frac{2-p}{p^3}$$

Sostituendo questo valore nella relazione (1) troviamo:

$$VAR(X) = p\frac{2-p}{p^3} - \frac{1}{p^2} = \frac{2-p-1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

Quindi:

$$VAR(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales