# Variabili aleatorie di Poisson

## Quando si usa

Si usa per trovare la probabilità connessa al numero di eventi che si verificano in un determinato tempo. Ad esempio:

- numero di barattoli di vetro che si rompono in un supermercato in una settimana;
- numero di chiamate che arrivano ad un centralino in un'ora;
- numero di pacchetti che arrivano ad un router in un giorno;
- numero di arrivi al pronto soccorso in una settimana.

Gli eventi si possono associare ad un avariabile aleatoria di Poisson se:

- sono indipendenti tra loro: il verificarsi dell'evento E nell'intervallo [$t_o$, $t_1$] è indipendente dal suo verificarsi nell'intervallo [$t_2$, $t_3$] se i due intervalli non si sovrappongono;
- la probabilità del verificarsi di un evento in un intervallo di tempo infinitesimo è proporzionale ad un parametro che caratterizza la prova;
- la probabilità che si verifichino più eventi nell'intervallo di riferimento è circa pari a zero[1].

La probabilità che si verifichino k eventi in un determinato intervallo di tempo è dato da:

$$p(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

## Esempio

Ad un centralino arrivano in media 8 chiamate ogni ora. Trovare la probabilità che arrivino 3 chiamate in 2 minuti.
Possiamo usare la variabile casuale di Poisson ma prima troviamo il numero medio di chiamate in 2 minuti. Usiamo la proporzione:

$$8: 60 = \lambda: 2$$

da cui si ricava:

$$\lambda = \frac{16}{60} = \frac{4}{15}$$

La probabilità cercata vale:

$$p(X = 3) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{\left(\frac{4}{15}\right)^3}{3!} e^{-\frac{4}{15}} = 0.0078$$

## La media (o valore atteso)

Troviamo la media ricordando che è data dalla somma del valore assunto dalla variabile per la sua probabilità:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} k \frac{\lambda^k}{k(k-1)!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} =$$

[1] A volte, in letteratura, si trova l'espressione "eventi rari".

Ricordando lo sviluppo in serie di Mc Lauren della funzione esponenziale si trova[2]:

$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda} = \lambda$$

Quindi:

$$E(X) = \lambda$$

**La varianza**

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)^2] =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} - \lambda^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1+1) \frac{\lambda^k}{k(k-1)(k-2)!} e^{-\lambda} - \lambda^2 =$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k(k-1)(k-2)!} + e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} k \frac{\lambda^k}{k(k-1)!} - \lambda^2 =$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} - \lambda^2 =$$

Ricordando lo sviluppo in serie di Mc Lauren della funzione esponenziale troviamo:

$$= \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} - \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

Quindi:

$$Var(X) = \lambda$$

Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales

[2] Sviluppo in serie di Mc Lauren: $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} x^k$