Esercizio 31:

Determinare l'area della regione finita di piano individuata dalle parabole di equazione:

$$y = x^2 - 1 \qquad y = -x^2 - 3x - 1$$

Svolgimento:

Dobbiamo disegnare i grafici delle parabole. Consideriamo la prima parabola. Dato che il coefficiente a è positivo sarà convessa. Coordinate del vertice:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{0}{2} = 0 \quad y_V = -1$$

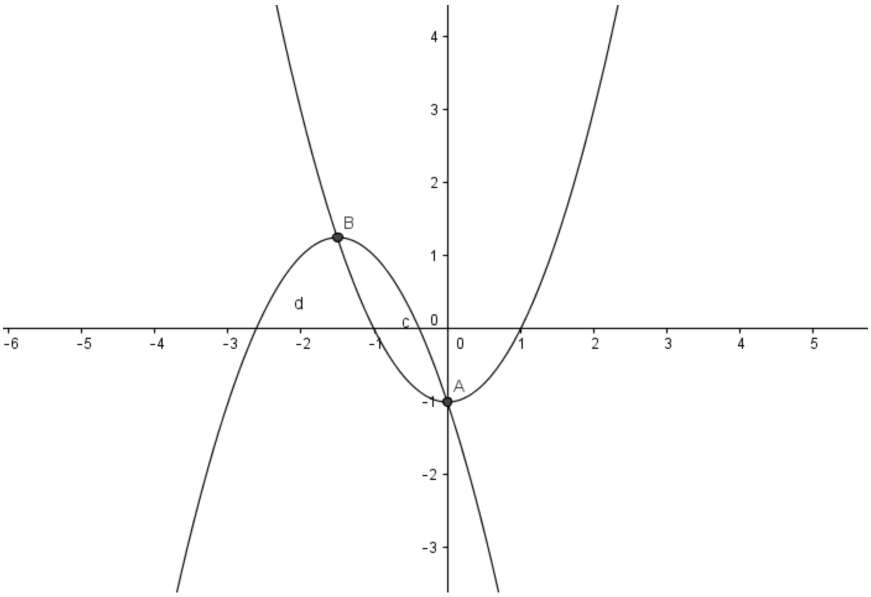
Intersezione con l'asse delle ascisse:

$$x^2 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x_{1-2} = \pm 1$$

Consideriamo la seconda parabola. Il coefficiente a è negativo quindi è concava. Coordinate del vertice:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{-2} = -\frac{3}{2} \quad y_V = -\frac{9}{4} - 3\left(-\frac{3}{2}\right) - 1 = \frac{-9 + 18 - 4}{4} = \frac{5}{4}$$

Possiamo disegnare il grafico:



Troviamo i punti di intersezione delle due parabole risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = -x^2 - 3x - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x^2 - 1 \\ x^2 - 1 = -x^2 - 3x - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x^2 - 1 \\ 2x^2 + 3x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ x(2x + 3) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4} \end{cases}$$

Le due parabole si intersecano nei punti:

$$A(0, -1) \quad e \quad B\left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right)$$

Dobbiamo integrare tra $-\frac{3}{2}$ e 0. La parabola concava è quella che sta "sopra" quindi per trovare l'area richiesta dobbiamo risolvere il seguente integrale:

$$\int_{-\frac{3}{2}}^{0}[-x^2 - 3x - 1 - (x^2 - 1)]dx = \int_{-\frac{3}{2}}^{0}(-2x^2 - 3x)\,dx =$$

$$= -\int_{-\frac{3}{2}}^{0}(2x^2 + 3x)dx = -\left(2\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{3}{2}}^{0} =$$

$$= \frac{2}{3}\left(-\frac{27}{8}\right) + \frac{3}{2}\frac{9}{4} = -\frac{9}{4} + \frac{27}{8} = \frac{-18 + 27}{8} = \frac{9}{8}$$

Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales