Esercizio 34:

Determinare l'area della regione finita di piano individuata dalla retta e dalla parabola di equazione:

$$y = 3x - 1 \qquad y = -x^2 + x + 2$$

Svolgimento:

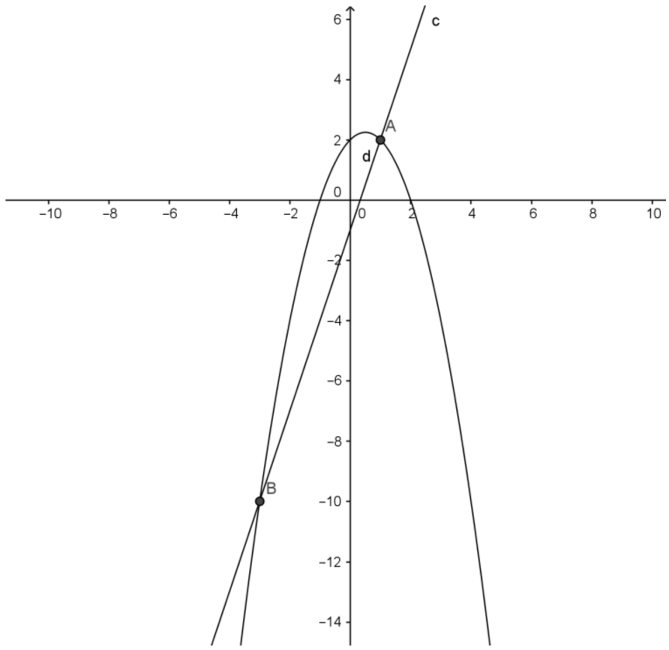
Dobbiamo disegnare i grafici della retta e della parabola. Consideriamo la parabola. Dato che il coefficiente a è negativo sarà concava. Coordinate del vertice:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2} \quad y_V = \frac{9}{4}$$

Per disegnare la retta troviamo due punti. Ad esempio:

$$se\ x = 0\ \ y = -1 \quad se\ x = 1\ \ y = 2$$

Possiamo disegnare il grafico:



Troviamo i punti di intersezione della retta e della parabola risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = -x^2 + x + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 3x - 1 \\ 3x - 1 = -x^2 + x + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 3x - 1 \\ x^2 + 2x + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x - 1 \\ x_{1-2} = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -10 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

La retta e la parabola si intersecano nei punti:

$$A(1, 2) \quad e \quad B(-3, -10)$$

Dobbiamo integrare tra $-3\ e\ 1$. La parabola è la curva che sta "sopra" quindi per trovare l'area richiesta dobbiamo risolvere il seguente integrale:

$$\int_{-3}^{1} [-x^2 + x + 2 - (3x - 1)]dx = \int_{-3}^{1} (-x^2 - 2x + 3)\, dx =$$

$$= -\int_{-3}^{1}(x^2 + 2x - 3)dx = -\left(\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x\right)\Bigg|_{-3}^{1} =$$

$$= -\left[\frac{1}{3} + 1 - 3 - \left(-\frac{27}{3} + 9 + 9\right)\right] = -\left[\frac{1}{3} - 2 + 9\right] = \frac{-1 + 6 - 27}{3} = \frac{32}{3}$$

Matilde Consales