Esercizio 37

Calcolare l'area della regione delimitata dalla parabola di equazione:

$$y = x^2 - 3x$$

Nell'intervallo $[-2; 1]$.

Svolgimento:

Innanzitutto disegniamo il grafico della parabola. Il coefficiente del termine al quadrato è positivo quindi la parabola è convessa. L'ascissa del vertice vale:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2}$$

Per trovare l'ordinata procediamo come segue:

$$y_V = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\frac{3}{2} = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = \frac{9-18}{4} = -\frac{9}{4}$$

Non ci resta che trovare i punti di intersezione con l'asse delle ascisse. Poniamo *y=0* e risolviamo:

$$x^2 - 3x = 0 \quad \rightarrow \quad x(x-3) = 0$$

I punti cercati sono:

$$P_1 = (0,0) \quad P_2 = (3,0)$$

Grafico:

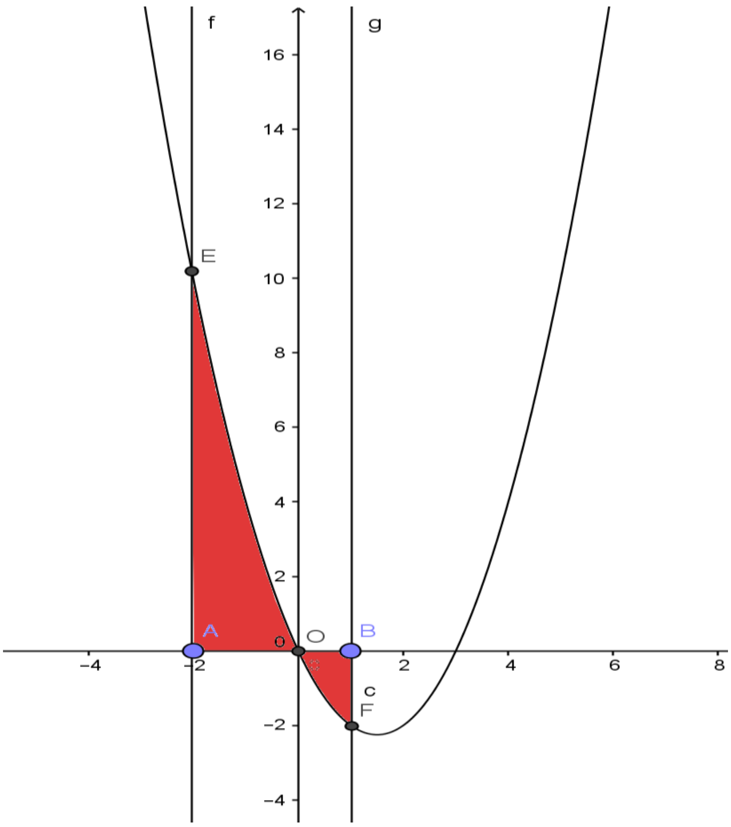

Figura 1

Dal grafico si vede che la parabola è positiva nell'intervallo $[-2; 0]$ e negativa in $[0; 1]$. Avremmo potuto vederlo anche in un altro modo. Poniamo:

$$x^2 - 3x \geq 0$$

Osserviamo che il coefficiente del termine al quadrato è positivo e che cerchiamo i valori maggiori di zero. Allora la disequazione è verificata per valori “esterni” all’intervallo delimitato dalle radici dell’equazione precedentemente calcolate. Possiamo scrivere:

$$x^2 - 3x \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \leq 0 \;\; e \;\; x \geq 3$$

Calcoliamo l’area:

$$Area = \int_{-2}^{0} (x^2 - 3x)dx - \int_{0}^{1} (x^2 - 3x)dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-2}^{0} - \left(\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2}\Bigg|_{0}^{1}\right) = -\left(-\frac{8}{3} - 3\frac{4}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2}\right) = -\frac{-16 - 36 - 2 + 9}{6} = \frac{45}{6}$$

L’area cercata vale:

$$Area = \frac{15}{2}$$

Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales