Esercizio 38

Calcolare l'area della regione di piano limitata dalle parabole di equazione:

$$y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x \quad e \quad y = \frac{4}{3}x^2 + 4x$$

E dalla retta di equazione *x=1*.

Svolgimento:

Innanzitutto disegniamo il grafico della prima parabola. Il coefficiente del termine al quadrato è negativo quindi la parabola è concava. L'ascissa del vertice vale:

$$x_{1V} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2\left(-\frac{1}{2}\right)} = -2$$

Per trovare l'ordinata procediamo come segue:

$$y_{1V} = -\frac{1}{2}(2)^2 - 2(-2) = -\frac{1}{2}4 + 4 = -2 + 4 = 2$$

Non ci resta che trovare i punti di intersezione con l'asse delle ascisse. Poniamo *y=0* e risolviamo:

$$-\frac{1}{2}x^2 - 2x = 0 \quad \rightarrow \quad x\left(-\frac{1}{2}x - 2\right) = 0$$

I punti cercati sono:

$$P_1 = (0,0) \quad P_2 = (-4,0)$$

Passiamo adesso alla seconda parabola: il coefficiente del termine al quadrato è positivo quindi la parabola è convessa. Ascissa del vertice:

$$x_{2V} = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2\frac{4}{3}} = -4\frac{3}{8} = -\frac{3}{2}$$

Ordinata del vertice:

$$y_{2V} = \frac{4}{3}\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 4\left(-\frac{3}{2}\right) = 4\frac{9}{4} - 6 = 9 - 6 = 3$$

Intersezione con l'asse delle ascisse:

$$\frac{4}{3}x^2 + 4x = 0 \quad \rightarrow \quad x\left(\frac{4}{3}x + 4\right) = 0$$

I punti cercati sono:

$$P_3 = (0,0) \quad P_4 = (-3,0)$$

Grafico:

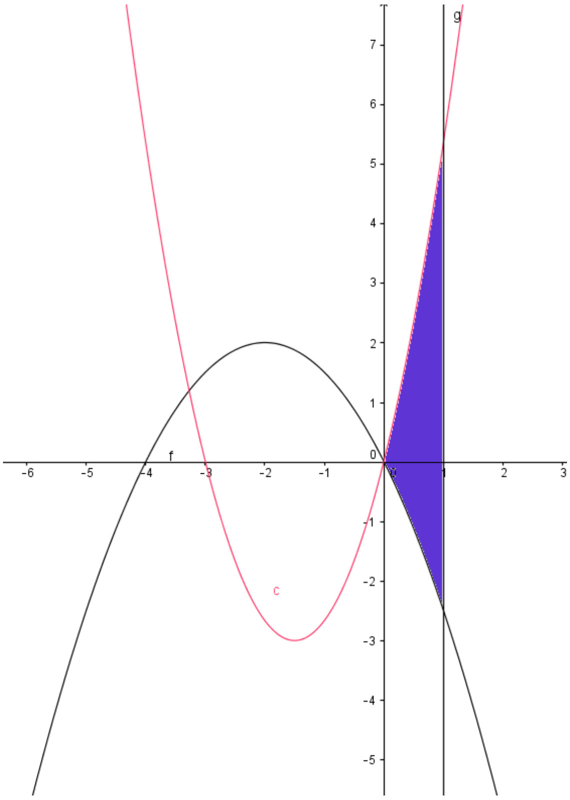

Figura 1

Guardiamo bene il grafico. L'area da calcolare è quella evidenziata in blu. Osserviamo che è delimitata dai punti di ascissa 0 e 1. Non è necessario trovare l'altro punto di intersezione tra le due parabole. Possiamo dividere l'area in due parti. Per vedere meglio facciamo un altro grafico:

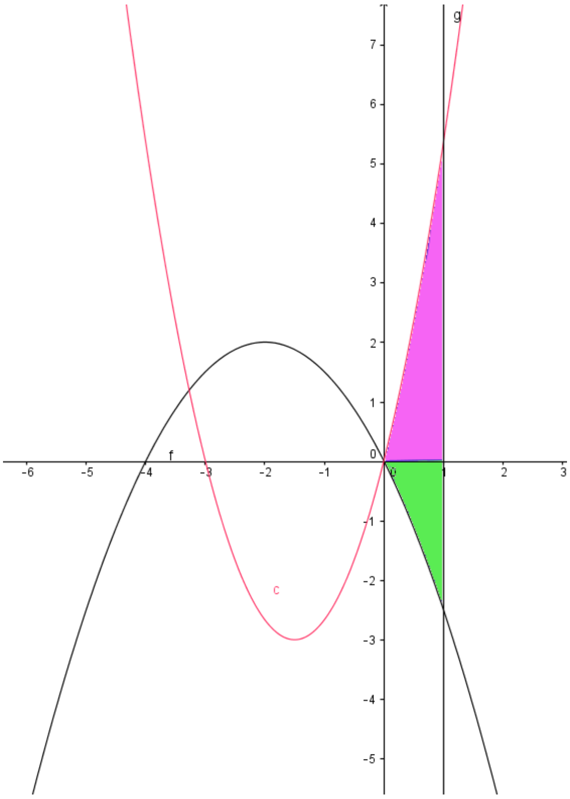

Figura 2

In figura 2 abbiamo evidenziato i due "pezzi" dell'area da determinare. Il pezzo fucsia è dato dalla parabola convessa (quella rossa in figura) mentre il pezzo verde è relativo alla parabola concava (quella nera). L'area totale (quella blu in figura 1) è la somma di queste due parti. Attenzione che dobbiamo cambiare segno alla parte verde perché si trova "sotto" (è negativa).
Calcoliamo l'area:

$$Area_{Tot} = Area_{Fucsia} + Area_{Verde} = \int_0^1 \left(\frac{4}{3}x^2 + 4x\right) dx + \int_0^1 \left[-\left(-\frac{1}{2}x^2 - 2x\right)\right] dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{4}{3}x^2 + 4x\right) dx + \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 + 2x dx =$$

$$= \frac{4}{3}\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 + \left(\frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1\right) = \frac{4}{9} + 2 + \frac{1}{6} + 1 = \frac{8 + 54 + 3}{18} = \frac{65}{18}$$

L'area cercata vale:

$$Area = \frac{65}{18}$$

Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales