

**Esercizio 1:**

Calcolare il volume del solido:

$$(x + 2y)^2 + (3x + y + z)^2 + z^2 \leq 1$$

**Svolgimento:**

Si tratta di un ellissoide. Per calcolare il volume effettuiamo il seguente cambio di variabile:

$$u = x + 2y; \quad v = 3x + y + z; \quad w = z$$

Sostituendo nell'equazione dell'ellissoide si trova:

$$u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$$

Cioè l'equazione di una sfera con centro nell'origine e raggio 1.

Scriviamo la matrice jacobiana:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo ora il determinante (conviene svilupparlo rispetto alla terza riga):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 * (-1)^{3+1} (1 - 6) = -5$$

Il volume del solido è dato dal volume della sfera di raggio 1 per  $\frac{1}{5}$ .

Allora il volume dell'ellissoide dato vale:

$$V = \frac{1}{5} * \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{1}{5} * \frac{4}{3} \pi = \frac{4}{15} \pi$$