Esercizio 2:
Determinare il volume della regione definita da:

$$R = \{(x,y,z): (x+2y)^2 + (x-2x+z)^2 + 3z^2 \le 4, \qquad (x+2y)^2 + 3z^2 \le 1\}$$

Svolgimento:
L'insieme R è l'intersezione di un ellissoide con un cilindro. Utilizzo il seguente cambiamento di coordinate:

$$\begin{cases} u = x + 2y \\ v = x - 2y + z \\ w = \sqrt{3}z \end{cases}$$

Calcolo lo Jacobiano del cambio di coordinate:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial(x+2y)}{\partial x} & \frac{\partial(x+2y)}{\partial y} & \frac{\partial(x+2y)}{\partial z} \\ \frac{\partial(x-2y+z)}{\partial x} & \frac{\partial(x-2y+z)}{\partial y} & \frac{\partial(x-2y+z)}{\partial z} \\ \frac{\sqrt{3}z}{\partial x} & \frac{\sqrt{3}z}{\partial y} & \frac{\sqrt{3}z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{vmatrix}$$

Calcolo il determinante secondo la terza riga:

$$det(J) = (-1)^{3+3}\sqrt{3}(-2-2) = -4\sqrt{3}$$

L'insieme dato diventa:

$$S = \{(u,v,w): u^2 + v^2 + w^2 \le 4, \qquad u^2 + w^2 \le 1\}$$

Trovo gli estremi di integrazione di v:

$$v^2 \le 4 - u^2 - w^2 \ \rightarrow \ -\sqrt{4-u^2-w^2} \le v \le \sqrt{4-u^2-w^2}$$

$$vol(S) = \int_{u^2+w^2 \le 1} \left(\int_{-\sqrt{4-u^2-w^2}}^{\sqrt{4-u^2-w^2}} dv \right) dudw =$$

$$= \int_{u^2+w^2 \le 1} \left(v \Big|_{-\sqrt{4-u^2-w^2}}^{\sqrt{4-u^2-w^2}} \right) dudw = \int_{u^2+w^2 \le 1} \left(\sqrt{4-u^2-w^2} + \sqrt{4-u^2-w^2} \right) dudw =$$

$$= 2 \int_{u^2+w^2 \le 1} \sqrt{4-u^2-w^2}\, dudw$$

Uso le coordinate polari:

$$\begin{cases} u = \rho cos\theta \\ v = \rho sin\theta \end{cases}$$

Calcolo lo Jacobiano del cambio di coordinate:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \rho} & \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v}{\partial \rho} & \frac{\partial v}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial(\rho cos\theta)}{\partial \rho} & \frac{\partial(\rho cos\theta)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial(\rho sin\theta)}{\partial \rho} & \frac{\partial(\rho sin\theta)}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cos\theta & -\rho sin\theta \\ sin\theta & \rho cos\theta \end{vmatrix} = \rho cos^2\theta + \rho sin^2\theta = \rho$$

Estremi di integrazione:

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$u^2 + w^2 \leq 1$$

È la circonferenza nel piano uw di centro l'origine e raggio 1 quindi:

$$0 \leq \rho \leq 1$$

Ma allora:

$$2\int_{u^2+w^2\leq 1} \sqrt{4-u^2-w^2}\, dudw = 2\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{4-\rho^2cos^2\theta-\rho^2sin^2\theta}\, d\theta\right)\rho d\rho =$$

$$= 2\int_0^1 \rho\sqrt{4-\rho^2}\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)d\rho = 2\int_0^1 \rho\sqrt{4-\rho^2}\left(\theta|_0^{2\pi}\right)d\rho = 2\int_0^1 \rho\sqrt{4-\rho^2}(2\pi)\, d\rho =$$

$$= 4\pi\int_0^1 \rho\sqrt{4-\rho^2 d\rho}$$

Integro per sostituzione:

$$t = 4-\rho^2 \;\; \rightarrow \;\; dt = -2\rho d\rho \;\; \rightarrow \;\; \rho d\rho = -\frac{1}{2}dt$$

$$se\ \rho = 0 \;\rightarrow\; t = 4; \;\; se\ \rho = 1 \rightarrow t = 3$$

$$4\pi\int_0^1 \rho\sqrt{4-\rho^2 d\rho} = 4\pi\left(-\frac{1}{2}\right)\int_4^3 \sqrt{t}\, dt = -2\pi\left(\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_4^3\right) = -2\pi\frac{2}{3}\left(\sqrt{3^3}-\sqrt{4^3}\right) =$$

$$= -\frac{4\pi}{3}\left(3\sqrt{3}-8\right) = \frac{4\pi}{3}\left(8-3\sqrt{3}\right)$$

Il volume cercato vale:

$$vol(R) = \frac{1}{|det(J)|}vol(S) = \frac{1}{4\sqrt{3}}\frac{4\pi}{3}\left(8-3\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\left(8-3\sqrt{3}\right)$$